作业三

题 1　　求证：如果(s,t)是曲面片的正交参数系，则 Gauss 曲率有公式

$$K=-\frac{1}{\sqrt{EG}}\left(\left(\frac{\left(\sqrt{E}\right)_t}{\sqrt{G}}\right)_t+\left(\frac{\left(\sqrt{G}\right)_s}{\sqrt{E}}\right)_s\right)$$

题 2　　如果(s,t)是曲面片的等温参数系，$g=\rho^2\cdot(\mathrm{d}s^2+\mathrm{d}t^2)$，则 Gauss 曲率有公式

$$K=-\frac{\triangle(\log\rho)}{\rho^2}$$

其中$\triangle f=f_{ss}+f_{tt}$；log是自然对数。

题 3　　求证：如果(s,t)是曲面片参数系，且参数曲线网是正交的曲率线网，则平均曲率有公式

$$H=\frac{L_t}{E_t}=\frac{N_s}{G_s}$$

题 4　　问：是否存在空间参数曲面片实现如下第一、第二基本形式?

$$g=\mathrm{d}s^2+\mathrm{d}t^2,\qquad h=\mathrm{d}s^2-\mathrm{d}t^2$$

题 5　　设$\gamma(s)$是弧长参数曲线段，假设γ在$s\in J$曲率处处非零，γ生成的*切线面*是指$\phi(s,t)=\gamma(s)+t\,\dot{\gamma}(s)$，（$\phi$在$(s,t)\in J\times(\mathbb{R}\setminus\{0\})$处处局部正则）。求证：切线面（在正则点处）的 Gauss 曲率处处为零。

题 6　　问：如果弧长参数曲线段$\gamma(s)$在$s=0$处曲率、挠率都非零，则γ的切线面在$(s,t)=(0,1)$附近，是否可能形如$\psi(x,y)=\alpha(x)+y\boldsymbol{v}$或$\psi(x,y)=p+y\boldsymbol{v}(x)$（即：是否可能形如柱面或锥面）？

题 7　　设$\phi\colon U\to\mathbf{E}^3$和$\tilde{\phi}\colon\tilde{U}\to\mathbf{E}^3$是局部正则的参数曲面片，$\tau\colon\tilde{U}\to U$是光滑同胚。求证：$\tau$保长，当且仅当

$$\begin{pmatrix}E\circ\tau & F\circ\tau\\ F\circ\tau & G\circ\tau\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\tilde{E} & \tilde{F}\\ \tilde{F} & \tilde{G}\end{pmatrix}$$

题 8　　假设如上题。求证：τ保角，当且仅当存在函数$\rho\colon\tilde{U}\to\mathbb{R}$，使得

$$\begin{pmatrix}E\circ\tau & F\circ\tau\\ F\circ\tau & G\circ\tau\end{pmatrix}=\rho\cdot\begin{pmatrix}\tilde{E} & \tilde{F}\\ \tilde{F} & \tilde{G}\end{pmatrix}$$

题 9　　假设如前题。求证：τ保角当且仅当

$$\sqrt{(EG-F)\circ\tau}=\sqrt{\tilde{E}\tilde{G}-\tilde{F}^2}$$

题 10 求证: 如果关于相同弧长参数$s \in J$的两条曲线段的曲率函数处处相等且非零, 则它们的切线面通过参数$(s, t) \in J \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$的等同实现保长对应。

题 11 求证：切线面在正则点附近总与平面存在局部保长对应。

题 12 问：如果$\tau: \widetilde{U} \to U$是两个平面区域之间的保角对应，$\tau$是否总把$\widetilde{U}$中的圆变为$U$中的圆?