作业一

题 1　设$(\boldsymbol{e}_1(t),\boldsymbol{e}_2(t),\boldsymbol{e}_3(t))$是$V(\boldsymbol{E}^3)=\mathbb{R}^3$中一组运动的单位正交基底，每个向量都光滑地依赖于开区间上取值的参数$t\in J$。 设它们的求导在基底上由如下三阶方阵$A(t)$表达：

$$\left(\dot{\boldsymbol{e}}_1(t),\dot{\boldsymbol{e}}_2(t),\dot{\boldsymbol{e}}_3(t)\right)=\left(\boldsymbol{e}_1(t),\boldsymbol{e}_2(t),\boldsymbol{e}_3(t)\right)A(t)$$

求证：对每个$t\in J$，$A(t)$都是反对称方阵（即转置等于取负）。

题 2　推导挠率关于一般正则参数的公式

$$\mathrm{Tors}_\gamma(t)=\frac{\left(\dot{\gamma}(t)\times\ddot{\gamma}(t)\right)\cdot\dddot{\gamma}(t)}{\left\|\dot{\gamma}(t)\times\ddot{\gamma}(t)\right\|^2}$$

题 3　计算空间曲线段的弧长：

$$\gamma(t)=(\cosh t\,,\sinh t\,,t),\qquad t\in[0,1]$$

题 4　计算平面曲线各点的曲率（$a>0$）：

$$\gamma(\theta)=\left(e^{a\theta}\cos\theta\,,\qquad e^{a\theta}\sin\theta\,\right),\qquad \theta\in(0,+\infty)$$

题 5　计算空间曲线各点的曲率和挠率：

$$\gamma(t)=(\cos^3 t\,,\sin^3 t\,,\cos 2t),\qquad t\in\mathbb{R}$$

题 6　计算空间曲线在点(2,2,6)的曲率和挠率：

$$\begin{cases}x^2+y^2=8\\ z=x^3-x\end{cases}$$

题 7　计算空间曲线在点(2,2,1)处的密切平面方程：

$$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=9\\ x^2-z^2=3\end{cases}$$

题 8　求证：若空间曲线在每点处的密切平面都经过定点，则曲线为平面曲线（即落在一张平面上）。

题 9　用κ表记曲率，τ表记挠率，s表记弧长参数。求证：如果弧长参数曲线段κ,τ处处非零，且

$$\frac{1}{\kappa^2}+\frac{1}{\tau^2}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{1}{\kappa}\right)\right)^2$$

为（不依赖s的）常数，那么，曲线要么是常曲率曲线，要么是球面上的曲线。

题 10　设$\gamma(s)$为弧长参数$s\in(0,L)$的空间曲线段，曲率处处非零。定义$\gamma(s)$以$\gamma(0)$为起点的渐伸线（evolute）为参数曲线段$\Gamma(s)=\gamma(s)-s\gamma'(s)$。求：$\Gamma$各处的 Frenet 标架（用参数$s$

和γ的 Frenet 标架场表达）。

题 11　　接上题，求：Γ各处的曲率和挠率（用s和γ的曲率和挠率函数表达）。

题 12　　设空间曲线的曲率处处非零，且挠率处处是曲率的c倍，其中$c > 0$为固定常数。求：曲线的参数方程。