

# 拓扑空间的初步知识

在这篇笔记里，我们介绍拓扑空间及其同胚，常见的拓扑性质，连续映射。

## 拓扑空间及其同胚

**定义** 任意给定集合 $X$ 上的一个拓扑结构（简称拓扑）是 $X$ 的某些特定子集组成的集合 $\mathcal{T} \subset 2^X$ ，其中那些特定子集称为 $\mathcal{T}$ 所声明的开集，并且要求满足如下性质（开集公理）：（1）空集和全集是开集，即 $\emptyset, X \in \mathcal{T}$ ；（2）任意多的开集的并集是开集，即对于任意 $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$ ，有 $\bigcup_{U \in \mathcal{S}} U \in \mathcal{T}$ ；（3）有限多个开集的交集是开集，即对于任意 $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{T}$ ，有 $U_1 \cap \dots \cap U_n \in \mathcal{T}$ 。指定了拓扑结构的集合就称为一个拓扑空间。

**定义** 拓扑空间 $X$ 的任何一个开集的补集就称为一个闭集，即 $V \subset X$ 是闭集当且仅当 $X \setminus V$ 是开集。于是声明拓扑空间等价于声明其所有闭集，并使满足如下性质（闭集公理）：（1）空集和全集是闭集；（2）任意多的闭集的交集是闭集；（3）有限多个闭集的并集是闭集。

**例** 任意度量空间 $(X, d_X)$ 都自然有一个由度量诱导的拓扑结构。对于任意点 $x \in X$ ，把中心在 $x$ 、半径为 $\epsilon > 0$ 的度量开球记为 $B_\epsilon(x) = \{y \in X: d_X(x, y) < \epsilon\}$ 。我们声明 $X$ 的开集是所有这样的子集 $U \subset X$ ，对每一点 $x \in U$ ，存在视 $x$ 而定的半径 $\epsilon > 0$ 使得 $B_\epsilon(x) \subset U$ 。验证留作练习。特别地，欧氏度量拓扑给出的就是实分析中常见的 $\mathbb{R}^n$ 的开集以及闭集，所以它就是实空间的点集拓扑。

**例** 拓扑空间的子空间都有通过限制获得的拓扑结构。具体来讲，如果 $Y$ 是拓扑空间 $X$ 的子集，它的子空间拓扑所声明的开集就是所有形如 $Y \cap U$ 的子集，其中 $U$ 是 $X$ 的开集。例如，我们通常就把三维欧氏向量空间的单位球面的拓扑理解为它的子空间拓扑。

**练习** 在双曲平面的共形圆盘模型中，复平面的单位圆盘既具有子空间拓扑，又具有双曲度量的诱导拓扑，试说明这两个拓扑是相同的。

**例** 拓扑空间的商空间都有诱导的拓扑结构。具体来讲，如果拓扑空间 $X$ 上有一个等价关系 $\sim$ ，则其全部等价类 $\bar{x} \subset X$ 组成的集合 $\bar{X}$ 可以赋予一个拓扑，而开集被声明为所有这样的子集 $\bar{U} \subset \bar{X}$ ，使得 $\bigcup_{\bar{x} \in \bar{U}} \bar{x}$ 是 $X$ 的开集。例如，三维欧氏向量空间的单位球面上把对径点视为等价，则其相应的商空间可以认同为实射影平面，即把任意直径指示的对径点对认同于线把模型中直径所在的直线。这样就可以为实射影平面赋予一个来自球面的商空间拓扑，我们姑且称它为实射影平面的点集拓扑。

**例** 如果拓扑空间的单点都是开集，则它的拓扑称为离散拓扑。这时所有的子集都是开集，空间看起来散落如星。例如，整数集从实数轴继承的子空间拓扑就是离散拓扑。若换作有理数集，则其单点并不是开集。这时的子空间拓扑是一种完全不连通拓扑，意思是除单点而外，非空子集都可以写作两个不相交的开集的并。另外，任何集合都可以被赋予平凡拓扑，即除空集和全集而外别无开集。平凡拓扑无聊至极，因为任何两点都无法用开集加以区分。

更抽象的对象也常常组成拓扑空间。比如实射影平面上的所有射影圆锥曲线，欧氏平面上的所有保距变换，等等，它们的空间都可以具有非常自然的拓扑结构，以使我们能够讨论其中对象的收敛和连续运动。为空间赋予拓扑还可能有多重合理的方案，比如，实射影平面和扩充复平面常用的拓扑就不止一种。

**定义** 拓扑空间 $X$ 、 $Y$ 之间的一个同胚是一个可逆映射 $f: X \rightarrow Y$ ，且诱导两个拓扑之间的双射，即 $U \subset X$ 是开集当且仅当 $f(U) \subset Y$ 是开集。

**练习** 证明一个拓扑空间的全体自同胚关于映射的复合构成群。（它是集合吗？）

**练习** 证明度量空间的等距同构都是同胚。

**练习** 证明平面仿射变换都是同胚。

## 常见的拓扑性质

所谓拓扑性质就是拓扑空间的同胚不变性质，它们是拓扑学感兴趣的话题。我们列举几种基本并且常用的。在一般拓扑学中，它们还有强弱不同的变种，以适应某些需要的场合。

**定义** （连通性）一个拓扑空间称为是连通的，如果它不能写成两个非空开集的无交并。这等价于说空间的既开又闭的子集只有空集和全集。子空间的连通性则关于子空间拓扑而言。（关于包含关系）极大的连通子空间称为拓扑空间的一个连通分支。

**命题** 拓扑空间的不同连通分支互不相交，且它们全体的并集是全空间。

**证明** 我们首先说明：对于拓扑空间 $X$ 两个连通子集 $C_1$ 、 $C_2$ 而言，如果 $C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$ ，则 $C_1 \cup C_2$ 也连通。事实上，假设 $C_1 \cup C_2$ 是它的开子集 $A$ 、 $B$ 的无交并，则由 $C_1$ 的连通性知 $A$ 、 $B$ 恰好有一个包含 $C_1$ ，不妨设为 $A$ 。由 $C_2$ 的连通性， $A$ 、 $B$ 也恰好有一个包含 $C_2$ ，但既然 $A$ 包含 $C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$ ，所以 $A$ 也包含 $C_2$ 。这说明假设之下， $A = C_1 \cup C_2$ 而 $B = \emptyset$ ，从而 $C_1 \cup C_2$ 也连通。

于是，在集合 $X$ 上可以建立二元关系 $\sim$ ，定义为 $x \sim x'$ 当且仅当存在 $X$ 的连通子集 $C$ 同时包含 $x$ 、 $x'$ 。二元关系 $\sim$ 的反身性和对称性显然，传递性由前述即知，故它是 $X$ 上的等价关系。全空间 $X$ 当然是其全部等价类的无交并。我们观察到： $X$ 的非空连通子集一旦与某个等价类相交非空，就完全被包含在那个等价类中。

现在来说明：每一个等价类就是一个连通分支。一方面，任何等价类 $\bar{x}$ 都是连通的。理由是否则的话，基于上述观察，分属 $\bar{x}$ 的两个不相交的既开又闭集的两点无法同属于 $X$ 的一个连通子集 $C \subset \bar{x}$ ，就与等价关系 $\sim$ 的定义矛盾。另一方面，基于同样的观察，没有更大的连通子集包含任何等价类 $\bar{x}$ 。所以等价类都是连通分支。这样就完成了证明。□

**练习** 证明单位球面是连通的。

**定义** （紧致性）一个拓扑空间称为是紧致的，如果任意开覆盖都有有限子覆盖。这就是说，如果 $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$ 是拓扑空间 $X$ 的一族开集，且它们的并集是 $X$ ，则其中存在有限多个， $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{S}$ ，且它们的并集是 $X$ 。

**定理\*** 有限维实空间中的子空间是紧致的当且仅当它是有界且闭的。

**证明** 首先，紧致蕴含有限：对于给定的紧致点集 $K$ ，我们用中心在整数各点、边长是2的方块开集覆盖 $K$ ，紧致性表明有限多个这样的方块就已经足够。于是 $K$ 包含在一个边长充分大的方块内部，所以是有界集。其次，紧致蕴含闭：只要对于给定的紧致点集 $K$ ，说明任何不在 $K$ 中的点 $x$ 都具有与 $K$ 不交的开邻域。对任何 $y \in K$ 取半径为 $d_E(x, y)/3$ 的开球，由于所有这些开球覆盖紧致集 $K$ ，存在有限多个这样的开球覆盖 $K$ 。将这有限多个开球的半径最大值记作 $r$ ，容易验证以点 $x$ 为中心、长度 $r$ 为半径的开球与 $K$ 不相交。由点 $x$ 的任意性，可见 $K$ 在 $\mathbb{R}^n$ 中的补集是开集，即 $K$ 是闭集。于是， $\mathbb{R}^n$ 中的紧致子集都是有界闭集。

反过来， $\mathbb{R}^n$ 中有界闭集的紧致性的论证无疑应归结到实数空间 $\mathbb{R}$ 的完备性。我们对维数 $n$ 作归纳法。

当 $n = 1$ 时，我们需要说明 $\mathbb{R}$ 的有界闭集 $K$ 都是紧致的。假设有 $K$ 的一族开集覆盖，由子空间拓扑的定义，这相当于是说有一族 $\mathbb{R}$ 的开集 $\mathcal{S}$ ，使得它们的并集包含 $K$ ，而我们要说明 $\mathcal{S}$ 的某个有限子族也具有这样性质。首先来说明 $\mathcal{S}$ 的某个可数子族 $\mathcal{S}'$ 也具有这样的性质。我们发现 $\mathcal{S}$ 连同开集 $W = \mathbb{R} \setminus K$ 构成 $\mathbb{R}$ 的开集覆盖，但以每个有理点为中心都可以取定一个半径是有理数的开区间包含于至少一个 $\mathcal{S} \cup \{W\}$ 中的成员。由于 $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ 稠密，这样取定的可数多个有理开区间已经覆盖 $\mathbb{R}$ ，对其每个抽取一个 $\mathcal{S} \cup \{W\}$ 的成员，就构成 $\mathbb{R}$ 的一个可数子覆盖，而其中来自 $\mathcal{S}$ 的成员构成 $K$ 的可数子覆盖 $\mathcal{S}'$ 。接下来说明对 $K$ 的可数开集覆盖 $\mathcal{S}' = \{U_i \subset \mathbb{R}\}_{i \in \mathbb{N}}$ 还具有一个有限的子覆盖。不然的话，我们会获得一系列点 $\{x_i \in K\}_{i \in \mathbb{N}}$ 使得每个 $x_i$ 都落在 $U_1, \dots, U_i$ 之外。因为 $K$ 是有界闭集， $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ 在 $K$ 中有聚点 $y \in K$ ，但那样每个包含 $y$ 的开集 $U_m$ 就都包含无数多个 $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ 中的点。我们获得 $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ 说明 $U_m$ 至多只包含开始的 $m$ 个点，因而矛盾。可见从 $\mathcal{S}'$ 还能抽取出 $K$ 的有限子覆盖 $\mathcal{S}''$ ，我们就奠定了归纳的基础。

当 $n > 1$ 时，归纳地假设 $\mathbb{R}^{n-1}$ 的有界闭集都是紧致的。对于 $\mathbb{R}^n$ 中的有界闭集 $K$ ，设 $\mathcal{S}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一族开集并且覆盖 $K$ ，我们要从中抽取有限子覆盖。为此，把最后一个坐标分量为 $t \in \mathbb{R}$ 的 $K$ 的子集记作 $K_t$ 。注意每个 $K_t$ 都是超平面 $\mathbb{R}^{n-1} \times \{t\}$ 的有界闭集，而超平面都同胚于 $\mathbb{R}^{n-1}$ 。对于每一个 $K_t$ ，都可以通过归纳假设获得有限多个开集构成的 $\mathcal{S}'_t \subset \mathcal{S}$ 以覆盖 $K_t$ 。而且，因为 $K_t$ 每一个点都有一个在 $\mathbb{R}^n$ 中的开球邻域包含在某个 $U \in \mathcal{S}'_t$ ，对这些开球邻域用归纳假设可知： $\mathcal{S}'_t$ 其实覆盖一个形如 $K_t \times I_t$ 的有界集，其中 $I_t \subset \mathbb{R}$ 是包含 $t$ 的某个开区间。由于所有使得 $K_t$ 非空的 $t$ 构成 $\mathbb{R}$ 的有界闭集 $T$ ，运用归纳基础就可以抽取其中的有限多个 $I_{t_1}, \dots, I_{t_r}$ 覆盖 $T$ 。容易验证， $\mathcal{S}'_{t_1} \cup \dots \cup \mathcal{S}'_{t_r} \subset \mathcal{S}$ 就如愿地给出 $K$ 的有限子覆盖。这样就完成了归纳。□

**例** 球面是紧致的，而平面不是紧致的，于是它们互不同胚。

**练习** 证明紧致空间的闭子空间和商空间都是紧致的。

**练习** 证明实射影平面（关于它的点集拓扑）是紧致的。

**例** 任何拓扑空间都可以通过单点紧化变成紧致的拓扑空间，方法如下。假设 $X$ 是拓扑空间。令 $X^+$ 为集合 $X \cup \{\infty\}$ ，其中 $\infty$ 为额外的点。赋予 $X^+$ 如下的拓扑结构，其开集要么为 $X$ 的开集，要么形如 $(X \setminus K) \cup \{\infty\}$ ，其中 $K$ 是 $X$ 的紧致子集。容易验证 $X^+$ 是紧致空间。如果 $X$ 本身是紧致的 $X^+$ 就为它添加了一个单点连通分支 $\{\infty\}$ ，而 $\emptyset^+$ 就是单点空间。例如，扩充复平面可以看作平面的单点紧化而获得拓扑，从而而同胚于球面。

**练习** 证明扩充复平面的 Möbius 变换都是同胚。

**定义** (分离性) 一个拓扑空间称为是 Hausdorff 的, (或  $T_2$  空间), 如果对于任何互异的两点, 存在两个分别包含各点的互不相交的开集。

如果我们把空间中一系列点  $\{x_n \in X\}_{n \in \mathbb{N}}$  之收敛到一点  $x_\infty \in X$  理解为对任何包含  $x_\infty$  的开集  $U$ , 对应于所有充分大的  $n$  的那些  $x_n$  都落在  $U$  中, 那么 Hausdorff 条件就可以保证收敛点列的极限点必须唯一。

**练习** 证明 Hausdorff 空间的紧致子集都是闭集。

**练习** 证明度量空间关于度量拓扑都是 Hausdorff 空间。

**练习** 证明实射影平面 (关于它的点集拓扑) 是 Hausdorff 空间。

**例** (双重原点的直线) 在集合  $\mathbb{R} \times \{\pm 1\}$  上定义拓扑, 声明其开集为所有形如  $(U_+ \times \{1\}) \cup (U_- \times \{-1\})$  的子集, 其中  $U_\pm$  为  $\mathbb{R}$  的开集。又在集合  $\mathbb{R} \times \{\pm 1\}$  上定义等价关系,  $(x, s) \sim (x', s')$  当且仅当  $x = x' \neq 0$ 。这样得到的商空间  $X$  在其诱导拓扑下看起来好像是直线而具有两个不同的原点。这两个原点没有不相交的开邻域, 所以  $X$  不是 Hausdorff 空间。

## 连续映射

**定义** 拓扑空间  $X, Y$  之间的一个连续映射是一个映射  $f: X \rightarrow Y$ , 且满足开集的原像都是开集, 即对于  $Y$  的任意开集  $W \subset Y$ , 其原像  $f^{-1}(W) \subset X$  总是  $X$  的开集。

**命题** 度量空间  $X, Y$  之间的关于度量拓扑的连续映射  $f: X \rightarrow Y$  可以等价地刻画如下: 对于任意  $\epsilon > 0$  和  $x_0 \in X$ , 存在  $\delta_0 = \delta_0(x_0, \epsilon) > 0$ , 使得对于任意  $0 < \delta < \delta_{x, \epsilon}$  和任何  $x \in B_\delta(x_0)$ , 都有  $f(x) \in B_\epsilon(f(x_0))$ 。

**证明** 度量拓扑中, 开集的原像是开集说明任何以  $f(x_0)$  为中心的球形邻域, 其原像都包含任何原像点  $x_0$  的某个球形邻域, 即题中的  $\epsilon$ - $\delta$  表述。反之, 满足  $\epsilon$ - $\delta$  表述的映射保证给定任何以  $f(x_0)$  为中心的球形邻域, 任何原像点  $x_0$  充分小的球形邻域中的点无一落在  $f(x_0)$  给定球形邻域之外, 可见  $f(x_0)$  给定球形邻域的原像包含  $x_0$  某个球形邻域, 从而开集的原像总是开集。□

**例** 同胚是连续映射。拓扑空间的任何子空间的含入映射是连续映射。拓扑空间到它的任何商空间的商映射把点映到其等价类, 也是连续映射。

**定理** 紧致空间到 Hausdorff 空间的连续双射是同胚。

**证明** 只要证明这样的映射是开映射, 即开集的像是开集。因为考虑的是双射, 这等价于证明闭集的像是闭集。但紧致空间中的闭子集都是紧致集, 它们在连续映射下的像依然紧致。由于 Hausdorff 空间的紧致子集都是闭集, 我们就证明了结论。□

**练习** 证明连通性和紧致性在连续映射下保持，即：连通空间在连续映射下的像（关于它的子空间拓扑）是连通的；紧致性也类似。举例说明 Hausdorff 分离性在连续映射下未必保持。