双曲平面的几种模型

作为一种非欧几何，平面双曲几何革命性地放弃了欧氏平面的平行公设，代之以新的公设：经过直线外一点至少存在两条直线不与给定的直线相交。在 19 世纪的 20—30 年代，这样一种新的几何学被匈牙利的 J. Bolyai、俄国的 N. Lobachevsky、还有 C. F. Gauss 各自独立地发展起来。1868 年，E. Beltrami 通过建立双曲几何的射影圆盘模型，说明了在欧氏几何逻辑无矛盾的假设下，非欧的公理体系也不会导致矛盾。1871 年，F. Klein 引入了今天使用的*双曲几何*的这个名字，并将它与椭圆几何和抛物几何（其实就是欧氏几何）并列。由于它所展示的负曲率空间的重要直观，也由于它在前沿数学中的广泛应用，我们将用与实射影平面差不多的篇幅，来建立对于双曲平面的初步认知。

为了概念的简便，我们选择直接在度量空间的等距范畴里着手讨论。这就像当初我们引进欧氏几何的时候一样，而公理体系的那条道路从一开始就不加考虑了。在这篇笔记的最后一节，我们会列举一些双曲平面区别于欧氏平面的特殊现象。建议读者先行浏览，以获得一些印象。

定义　一个度量空间

$$(\mathbf{H}^2, \mathrm{d_H})$$

被称为一张*双曲平面*，如果它等距同构于本篇以下列出的任意一种模型。

我们将利用扩充复平面的某些部分建立共形圆盘模型(Poincaré模型)和上半空间模型，然后简单介绍射影 Lorentz 空间模型。这些模型当然也都是互相等距同构的。使用相对较少的射影圆盘模型（Beltrami—Cayley—Klein 模型），本篇暂不涉及。当使用*平面双曲几何*这一术语的时候，我们指的就是双曲平面连同它自身的保距变换群。

共形圆盘模型

定义　双曲平面的*共形圆盘模型*是如下度量空间(D, d_D)。集合

$$D = \{z \in \mathbb{C}: |z| < 1\}$$

是复平面上的开单位圆盘。对于任意$z_1, z_2 \in D$，它们之间的距离定义为

$$d_D(z_1, z_2) = -\log(z_1, z_2; \xi_1, \xi_2) = \log\frac{|z_2 - \xi_1||z_1 - \xi_2|}{|z_1 - \xi_1||z_2 - \xi_2|},$$

其中ξ_1、ξ_2是单位圆周∂D上的两点，使得以ξ_1、ξ_2为始末端点、且与单位圆周正交的有向圆弧（可能是直径）依次经过z_1、z_2。

我们需要验证二元函数d_D确实定义了D上的一个度量，即它符合

$$d_D: D \times D \to [0, +\infty)$$

并且满足正定、对称、三角形不等式。进一步，我们想决定共形圆盘的保距变换群，以及讨论各种双曲图形的性质。

在开始之前，让我们先来不加证明地描述一下希望达到的图景：

1. 测地线看起来正好是所有与单位圆周正交的欧氏圆弧（不含端点，可能是直径）。（在一般的度量空间，取代欧氏几何中的直线的概念是*测地线*，它是与欧氏直线等

距同构的子集，换言之，测地线上任意两点在空间中的最短路径都能够由那条测地线在它们之间的线段实现。）

2. 圆看起来也是复平面上的欧氏圆，并且完全在单位圆周内部，不过双曲几何的圆心偏离所见欧氏圆的圆心，沿径向更远离复平面的原点。（到任意定点距离等于定长的点的集合称为圆。）
3. 相同半径的圆越远离原点，看起来欧氏直径越小，位置越接近单位圆周。
4. 测地线段形成的角看起来等于圆弧的欧氏夹角;（角的严格定义需要用到黎曼几何，这里我们权且取后者为前者的定义。）

下面，我们来验证距离函数d_D的各项性质。它们多数都比较简单，唯独三角形不等式，直接验算显得无谋。我们将借助对 Möbius 变换的观察来完成其证明。

命题

1） 对于任意$z_1, z_2 \in D$，d_D定义中的交比$(z_1, z_2; \xi_1, \xi_2) \geq 1$，等号成立当且仅当$z_1 = z_2$；于是$d_D$存在且正定。

2） 对于任意$z_1, z_2 \in D$，$d_D(z_1, z_2) = d_D(z_2, z_1)$。

3） 如果$z_1, z_2, z_3 \in D$且依次落在同一于单位圆周正交的圆弧上，则$d_D(z_1, z_3) = d_D(z_1, z_2) + d_D(z_2, z_3)$。

4） 函数d_D在保持单位圆周的 Möbius 变换下不变。

证明　为证第一条，可以选取适当的 Möbius 变换使相关四点的像落在实轴上，且顺序为$\xi_1', z_1', z_2', \xi_2'$，并且可以令$\xi_1' = 0, \xi_2' = 1$，于是$0 < z_1' \leq z_2' < 1$。由共圆复交比的反演不变性，得

$$(z_1, z_2; \xi_1, \xi_2) = (z_1', z_2'; 0,1) = ((z_1')^{-1} - 1)/((z_1')^{-1} - 1) \geq 1,$$

等号成立当且仅当$z_1 = z_2$。其余皆易见。□

命题　对任意$z \in D$

$$d_D(0, z) = \log\frac{1 + |z|}{1 - |z|}。$$

证明　这时d_D定义中的有向圆弧是直径，由定义式即见。□

命题　对于任意非零的$a \in D$，存在唯一的反演变换

$$\sigma_a(z) = \frac{a}{\bar{a}} \cdot \frac{(\bar{z} - \bar{a})}{(a\bar{z} - 1)}$$

满足$\sigma_a(D) = D$且$\sigma_a(a) = 0$。

证明　取反演圆圆心$1/\bar{a}$，半径$\sqrt{1 - |a|^{-2}}$，则反演圆于单位圆周正交，且$\sigma_a(a) = 0$。这样的反演也是唯一的。表达式可以相应写出。□

上面两个命题说明到任意定点双曲距离为定长的点的集合也是欧氏圆，且定长可以任意大。

练习 说明单位圆周内部的欧氏圆都是某个双曲度量的圆。如果欧氏圆心在b，欧氏半径$0 < r < \sqrt{1-|b|^2}$，写出相应双曲圆的圆心和半径。

命题 对于任意$z_1, z_2, z_3 \in D$，

$$d_D(z_1, z_3) \leq d_D(z_1, z_2) + d_D(z_2, z_3)。$$

证明 不妨假设$d_D(z_1, z_3) \geq d_D(z_1, z_2) = r_1$且$d_D(z_1, z_3) \geq d_D(z_2, z_3) = r_3$。记$l$为过$z_1$、$z_3$且与单位圆周正交的欧氏圆弧。分别以$z_1$、$z_3$为圆心，$r_1$、$r_3$为双曲半径作圆$C_1$、$C_3$。由于关于$l$所在欧氏圆的反演保持$d_D$且保持$z_1$、$z_3$不动，可见$C_1$、$C_3$与$l$正交。由于$C_1$、$C_3$内部的闭包有公共点$z_2$，看作欧氏圆， C_1、C_3相交或相切。由它们与l的正交性，则它们内部的闭包覆盖l上以z_1、z_3为端点的线段。又根据d_D在l实现度量，我们得出$d_D(z_1, z_3) \leq r_1 + r_3$，即所断言的三角形不等式。□

于是，我们验证了共形圆盘模型(D, d_D)确实是度量空间。并且，保持单位圆周的 Möbius 变换都是双曲度量的保距变换。

练习 证明共形圆盘上的全部测地线有且只有与单位圆周正交的欧氏圆弧和单位圆盘的欧氏直径。

命题 共形圆盘上给定不共线的三点，则任何双曲保距变换由它们的像完全决定。

证明 假设三点是A、B、C，它们的像分别是A'、B'、C'。由保距性，任何其它一点P的像可以通过以A'、B'、C'为圆心，$d_D(A, P)$、$d_D(B, P)$、$d_D(C, P)$为双曲半径作圆求交点唯一确定。□

定义 我们把关于共形圆盘的测地线所在的欧氏圆或直线的反演或反射称为*双曲平面的反射*。

练习 证明共形圆盘的保距变换是至多三个双曲平面的反射的乘积。由此说明共形圆盘的保距变换群恰好是保持圆盘不动的 Möbius 变换组成的变换群。

练习 证明共形圆盘的保向双曲保距变换都形如

$$\phi(z) = e^{\mathrm{i}\theta} \cdot \frac{z-a}{\bar{a}z-1}，(|\mathrm{a}| < 1)，$$

而反向双曲保距变换都形如

$$\phi(z) = e^{\mathrm{i}\theta} \cdot \frac{\bar{z}-\bar{a}}{\bar{a}\bar{z}-1}，(|\mathrm{a}| < 1)。$$

练习 利用$d_D(0, a)$的公式导出距离公式

$$d_D(z, w) = \log \frac{|\bar{z}w-1| + |z-w|}{|\bar{z}w-1| - |z-w|}。$$

上半平面模型

定义　双曲平面的上半平面模型是如下度量空间$(\mathfrak{H}, d_{\mathfrak{H}})$。集合

$$\mathfrak{H} = \{z \in \mathbb{C}: \mathrm{Im}(z) > 0\}$$

是复平面上的开上半平面。对于任意$z_1, z_2 \in D$，它们之间的距离定义为

$$d_{\mathfrak{H}}(z_1, z_2) = -\log\frac{z_1}{z_2},$$

如果$\mathrm{Re}(z_1) = \mathrm{Re}(z_2)$，且 $\mathrm{Im}(z_1) > \mathrm{Im}(z_2)$；或者

$$d_{\mathfrak{H}}(z_1, z_2) = -\log(z_1, z_2; \xi_1, \xi_2) = \log\frac{|z_2 - \xi_1||z_1 - \xi_2|}{|z_1 - \xi_1||z_2 - \xi_2|}。$$

如果$\mathrm{Re}(z_1) \neq \mathrm{Re}(z_2)$，$\mathrm{Im}(\xi_1) = \mathrm{Im}(\xi_2)$，且以$\xi_1$、$\xi_2$为端点、与实轴正交的有向圆弧依次过$z_1$、$z_2$。

我们取一个扩充复平面的保向 Möbius 变换ψ，它先关于中心在i、半径为$\sqrt{2}$的圆反演，再关于实轴反射。跟踪发现这样的 Möbius 变换把共形圆盘保向地变成上半平面。

练习　验证

$$\psi(z) = \frac{1 - \mathrm{i}z}{z - \mathrm{i}},$$

并且它给出共形圆盘到上半平面的等距同构。

练习　证明共形圆盘的保向双曲保距变换都形如

$$\phi(z) = \frac{az + b}{cz + d}，\ (a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc \neq 0),$$

而反向双曲保距变换都形如

$$\phi(z) = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}，\ (a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc \neq 0)。$$

我们用$\mathrm{PGL}(2, \mathbb{R})$表示 $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{C})$的子群，它的元素都有二阶实可逆矩阵代表，并且相差非零实数倍的矩阵被当作同样的元素。通过上面的练习，特别地我们得到：

定理　双曲平面的保向保距变换群同构于$\mathrm{PGL}(2, \mathbb{R})$。

注记　其保距变换群同构于$\mathrm{PGL}(2, \mathbb{R}) \rtimes \mathbb{Z}_2$，其中$\mathbb{Z}_2$可由双曲平面的任何一个反射生成的子群实现。

在上半平面模型中，双曲平面的测地线或者是垂直于实轴的射线，或者是与实轴正交的半圆弧。

射影 Lorentz 空间模型*

在讨论球面几何学的时候，我们实际上使用了三维欧氏向量空间中的单位球面作为模型。

在三维 Lorentz 向量空间中，我们可以类似地构造双曲平面的模型。与刚才的两个共形模型相比，这个向量代数的模型更容易解释双曲平面和球面的某些相像之处。

定义 三维的 *Lorentz 向量空间*是一个带有 Lorentz 内积的实三维向量空间，记作$\mathbb{R}^{1,2}$。具体来说，把$\mathbb{R}^{1,2}$中向量写成列向量形式$\mathbf{x} = (x_0, x_1, x_2)^{\mathrm{T}}$，其分量都是实数，则 Lorentz 内积定义为实值对称双线性函数

$$\mathbf{x} \odot \mathbf{y} = x_0 y_0 - x_1 y_1 - x_2 y_2。$$

我们记

$$\|\mathbf{x}\|^2 = \mathbf{x} \odot \mathbf{x}。$$

通常把x_0分量称为*时间分量*，x_1、x_2称为*空间分量*。满足$\|\mathbf{x}\|^2 = 0$的全体向量形成 Lorentz 空间中锥点在原点的一个关于时间轴旋转对称的锥面，称为*光锥*，光锥上的向量称为*类光向量*；满足$\|\mathbf{x}\|^2 > 0$的全体向量称为*类时向量*，它们组成光锥的*内部*, 根据时间分量的符号，分为*正类时向量*和*负类时向量*；满足$\|\mathbf{x}\|^2 < 0$的全体向量称为*类空向量*，它们组成光锥的*外部*。

定义 双曲平面的*射影 Lorentz 模型*是如下度量空间(F, d_F)。集合

$$F = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{1,2}: \|\mathbf{x}\|^2 = 1，且\ x_0 > 0\right\}$$

是正类时单位向量形成的旋转双曲面。对于任意$\mathbf{x}, \mathbf{y} \in F$，它们之间的距离定义为

$$d_F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \operatorname{arccosh}(\mathbf{x} \odot \mathbf{y})。$$

注记 注意光锥上的母线构成射影平面$\mathrm{P}(\mathbb{R}^{1,2})$的一条射影圆锥曲线。这条曲线的内部恰好一一对应旋转双曲面F的所有点。模型因此而得名。

引理 设$\mathbf{x}$、$\mathbf{y}$是正类时向量，则

$$(\mathbf{x} \odot \mathbf{y})^2 \geq \|\mathbf{x}\|^2 \|\mathbf{y}\|^2，$$

等号成立当且仅当$\mathbf{x}$、$\mathbf{y}$线性相关。

证明 只需假设它们线性无关并证明严格的比较。考虑$\mathbf{x}$、$\mathbf{y}$张成的二维子空间V，则由于V与光锥相交，Lorentz 内积限制在V是不定型的对称双线性函数，所以其限制在基底$\mathbf{x}$、$\mathbf{y}$上的矩阵特征值一正一负，行列式为负。这等价于说

$$\det\begin{pmatrix} \mathbf{x} \odot \mathbf{x} & \mathbf{x} \odot \mathbf{y} \\ \mathbf{x} \odot \mathbf{y} & \mathbf{y} \odot \mathbf{y} \end{pmatrix} < 0，$$

于是所断言的比较成立。□

有各种方法检验射影 Lorentz 模型与前面的共形模型等距同构，但都需要不少笔墨。不加证明地，我们指出映射

$$f: F \to D$$

按照

$$f(\mathbf{x}) = \frac{x_1 + \mathrm{i}\, x_2}{1 + x_0}$$

定义就给出射影 Lorentz 模型与共形圆盘模型的等距同构。

在射影 Lorentz 模型中，双曲平面的测地线正好是与光锥内部相交的$\mathbb{R}^{1,2}$的二维子空间与双曲面F的截口。双曲平面的保距变换可以刻画为保持 Lorentz 内积不变的$\mathbb{R}^{1,2}$的自同构，

并且保持时间方向，即保持全体正类时向量的集合不变。这样的变换称为正向 Lorentz 变换，它们组成的$\mathrm{GL}(3,\mathbb{R})$的子群记作$\mathrm{O}^{+}(1,2)$。保向的双曲变换对应于其中行列式为$1$（而不是$-1$）的那些三阶矩阵，它们组成子群$\mathrm{SO}^{+}(1,2)$。特别地，我们有$\mathrm{SO}^{+}(1,2)\cong\mathrm{PGL}(2,\mathbb{R})$。

双曲平面的几何现象

我们列举一些体现双曲平面的非欧几何特点的事实，它们多数可以直接通过前面的模型观察出来（除了最后关于面积的事实涉及积分）：

1. 过任意两点有且只有一条测地线；每一条测地线都是无穷长。
2. 过测地线外一点由无数条测地线不与给定测地线相交。
3. 三角形内角和小于π。
4. 对应角相等的两个三角形全等。
5. 同一端点发出的两条不同射线指数地散开。具体地讲，如过$A(\mathrm{r})$和$B(r)$是端点相同，方向不同的测地射线，r表示与端点的距离，则$r\to+\infty$时，$d_{\mathbf{H}}\big(A(r),B(r)\big)\to+\infty$，且增长为指数阶。
6. 三角形面积等于π减去内角和；特别地，三角形面积都小于π。
7. 半径趋于无穷时，圆的周长和面积都随半径指数增长，并且周长大于面积。