扩充复平面

在之前的讨论中，我们接触了空间欧氏几何$\mathbf{E}^3$、球面几何$\mathbf{S}^2$、空间仿射几何$\mathbb{R}\mathbf{A}^3$、实射影平面几何$\mathbb{R}\mathbf{P}^2$，它们的变换群分别同构于$\mathbb{R}^3 \rtimes \mathrm{O}(3)$、$\mathrm{O}(3)$、$\mathbb{R}^3 \rtimes \mathrm{GL}(3,\mathbb{R})$、$\mathrm{PGL}(3,\mathbb{R})$。运用变换群的观点，我们不再拘泥于长度、角度、比例等个别的几何特征，也因此能够在恰当的语境中谈论恰当的话题，能够把不同的几何摆置在合适的层面。比如，上述几何实际上都是实射影空间几何$\big(\mathbb{R}\mathbf{P}^3, \mathrm{PGL}(4,\mathbb{R})\big)$的局限形式，换句话说，它们都可以嵌入后者成为某些子集和那些子集的某些不变子群。

还有一些重要的几何可以纳入上面的框架。主要来讲，我们将讨论扩充复平面的保向 Möbius 几何，其空间和变换群都同构于复射影直线的几何$\big(\mathbb{C}\mathbf{P}^1,\ \mathrm{PGL}(2,\mathbb{C})\big)$。我们还将讨论平面双曲几何$\mathbf{H}^2$，其保向的保距变换群同构于$\mathrm{PGL}(2,\mathbb{R})$。根据变换群，我们可以推测：定向的平面双曲几何在本质上也许等价于实射影直线的几何$\big(\mathbb{R}\mathbf{P}^1,\ \mathrm{PGL}(2,\mathbb{R})\big)$，尽管它们的空间形式很不相同；而扩充复平面的保向 Möbius 几何也许能通过局限给出定向的平面双曲几何的等价形式。事实的确如此，并且我们会通过扩充复平面导出平面双曲几何的两种共形模型，即 Poincaré 圆盘模型和上半空间模型。

在这篇笔记里，我们介绍扩充复平面和它的 Möbius 变换，以作为[王，第六章第 1 节、第 2 节]的补充。

定义　平面欧氏几何中，关于中心在一点O、半径为r的定圆的*反演变换*

$$\sigma: \mathbf{E}^2 \setminus \{O\} \to \mathbf{E}^2 \setminus \{O\}$$

是这样的变换，它把异于点O的任何点P映到射线OP上的点$\sigma(P)$，使得

$$|OP| \cdot |O\sigma(P)| = r^2。$$

定义反演变换的定圆于是称为*反演圆*。

注记　把平面欧氏几何$\mathbf{E}^2$换作空间欧氏几何$\mathbf{E}^3$、圆换作球面，我们就得到关于空间球面的反演变换。一般维数的欧氏几何$\mathbf{E}^n$中，关于超球面的反演变换定义完全类似。

观察发现反演变换把远离反演圆心O的点都变到O附近。为了捕捉这个性质，我们为$\mathbf{E}^2$添加一个额外的点∞，称为*无穷远点*，把集合

$$\overline{\mathbf{E}^2} = \mathbf{E}^2 \cup \{\infty\}$$

称为*扩充平面*（extended plane）。这样，反演变换都可以唯一地延拓到扩充平面上，通过定义$\sigma(O) = \infty$，$\sigma(\infty) = O$。

命题

1) 反演变换以自身为逆变换，且以反演圆为不动点集。
2) 反演变换把不经过反演圆心的圆变成圆，把经过反演圆心的圆变成不经过反演圆心的直线。
3) 反演变换保持与反演圆正交的圆不变，保持经过反演圆心的直线不变。

证明　第一条性质由定义立即得出。为了证明第二条，考虑以C为圆心、a为半径的圆Γ上的任意点P，记$\boldsymbol{p} = \overrightarrow{OP}, \boldsymbol{c} = \overrightarrow{OC}$，则圆$\Gamma$的方程为$|\boldsymbol{p} - \boldsymbol{c}|^2 = a^2$。如果$\sigma(P) = Q$，记$\boldsymbol{q} = \overrightarrow{OQ}$，则由$\sigma(Q) = P$可知$\boldsymbol{p} = r^2\boldsymbol{q}\,/|\boldsymbol{q}|^2$，所以$\sigma(\Gamma)$的方程为$|(r^2\boldsymbol{q}\,/|\boldsymbol{q}|^2) - \boldsymbol{c}|^2 = a^2$。左边等于

$\left((r^2\boldsymbol{q}\,/|\boldsymbol{q}|^2)-\boldsymbol{c}\right)\cdot\left((r^2\boldsymbol{q}\,/|\boldsymbol{q}|^2)-\boldsymbol{c}\right)=r^4|\boldsymbol{q}|^{-2}-2r^2(\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{c})|\boldsymbol{q}|^{-2}+|\boldsymbol{c}|^2$，所以$\sigma(\Gamma)$的方程整理得

$$(|\boldsymbol{c}|^2-a^2)\,|\boldsymbol{q}|^2-2r^2(\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{c})+r^4=0$$

这在$|\boldsymbol{c}|^2-a^2\neq 0$时是圆的方程，否则是直线的方程。可见第二条成立。第三条性质的陈述，关于直线的部分显然成立。关于正交圆的部分，利用Γ与反演圆正交的等价条件$|\boldsymbol{c}|^2-a^2=r^2$，我们发现$\sigma(\Gamma)$的方程和$\Gamma$的方程等价。这就完成了证明。□

命题 反演变换反向保角。

注记 命题的陈述在这里理解为反演变换保持相交圆的夹角的大小，但反转其时针方向。在微分几何中，局部微分同胚的保向性和保角性均可以用切映射给出一般定义，而命题依然成立。

证明 设P是两圆Γ_1和Γ_2的一个交点，设经过P的切线分别为l_1和l_2。我们选取切线的方向使得P发出的相应的射线l_1^+和l_2^+张成的角域包含两圆内部的交集。反演变换σ之下，这两条切线都变成过反演圆心O的圆$\sigma(l_1)$和$\sigma(l_2)$，并且它们的一个交点是反演圆心，另一个交点是$\sigma(P)$。由图形的对称性可以看出，$\sigma(l_i)$在原点处的切线刚好平行于l_i，事实上$\sigma(l_i^+)$在O的切方向刚好与l_i^+反向平行。所以有向圆弧$\sigma(l_1^+)$和$\sigma(l_2^+)$的切方向在共同终点O的夹角与l_1^+和l_2^+在P的夹角大小相等，符号相同。因为$\sigma(P)$是有向圆弧$\sigma(l_1^+)$和$\sigma(l_2^+)$的共同起点，在那里它们的切方向夹角与终点O处大小相等，符号相反，所以也与射线l_1^+和l_2^+在P处的夹角等大反号。容易看出反演变换保持圆的相切关系（通过保持交点个数）。这说明$\sigma(\Gamma_1)$和$\sigma(\Gamma_2)$在$\sigma(P)$处夹角与Γ_1和Γ_2在P处夹角等大反向。□

注记 以上两个命题及其证明几乎可以照搬到任意维数。在用词的替换上，我们把圆换成超球面，圆弧换成球冠，直线换成超平面，射线换成超半平面。注意当两个超球面相交时，它们的截口是一个余 2 维的球面。由于图形围绕超球面的连心线旋转对称，两侧球冠沿形成的二面角沿着截口处处相等。

习惯上，人们也把$\mathbf{E}^2$看作全体复数组成的平面$\mathbb{C}$，于是写成

$$\overline{\mathbb{C}}=\mathbb{C}\cup\{\infty\},$$

改叫做*扩充复平面*（extended complex plane）。

由于复数运算的参与，使用单一复参数作为坐标在这里显得尤其方便。例如，关于圆心在$z_0\in\mathbb{C}$，半径为r的圆的反演变换可以表达为

$$\sigma(z)=z_0+\frac{r^2}{\bar{z}-\overline{z_0}}$$

其中约定涉及无穷时，$\frac{1}{\infty}=0$，$\frac{1}{0}=\infty$。特别地，函数$1/\bar{z}$表示关于单位圆的反演。

练习 写出平移、旋转、位似、反射的复坐标表达式。

定义 任意有限个反演变换复合而成的变换称为扩充平面的一个 *Möbius 变换*。扩充平面的全体 Möbius 变换关于复合构成的变换群称为 *Möbius 变换群*，记作$\mathcal{M}_2$。偶数个反演变换复合而成的 Möbius 变换构成的子群称为*保向 Möbius 变换群*，记作$\mathcal{M}_2^+$。

练习　　验证$\mathcal{M}_2$是群，$\mathcal{M}_2^+$是$\mathcal{M}_2$的正规子群。试说明$\mathcal{M}_2 \cong \mathcal{M}_2^+ \rtimes \mathbb{Z}_2$。

例　我们有时把任何直线与无穷远点的并集称为一个*无穷大圆*，并把平面关于直线的反射延拓到扩充平面并保持无穷远点不动，称为关于无穷大圆的*反演变换*。

假设L是一个无穷大圆，我们可以把关于L的反演写成普通反演的共轭如下。取Γ是圆心不在L上的普通圆，记关于Γ的反演为σ_Γ。于是$\sigma_\Gamma(L)$是普通圆L'，记关于L'的反演为$\sigma_{L'}$。于是$\sigma_\Gamma\sigma_{L'}\sigma_\Gamma$把直线映成直线，圆映成圆，所以限制在欧氏平面只是相似变换。再由$\sigma_\Gamma\sigma_{L'}\sigma_\Gamma$以$L$为不动点集且反向，可知它是关于无穷大圆$L$的反演变换。

特别地，关于无穷大圆的反演都是 Möbius 变换。

练习　　验证欧氏平面的平移、旋转、位似变换都可以唯一地延拓成扩充平面的 Möbius 变换，并保持无穷远点不动。

犹如实射影直线上的有序互异的四点具有实交比一样，在扩充复平面上，有序互异的四点具有复交比。前者是射影变换的不变量，后者则是保向 Möbius 几何的不变量。前者的调和点组犹如后者的（定向）共圆点组。

定义　　设$z_1, z_2, z_3, z_4 \in \bar{\mathbb{C}}$为扩充复平面上的有序互异四点。定义它们的*复交比*为

$$(z_1, z_2; z_3, z_4) = \frac{(z_3 - z_1)(z_4 - z_2)}{(z_3 - z_2)(z_4 - z_1)}$$

取值在$\bar{\mathbb{C}}$。如果其中有无穷远点，涉及无穷远点的两个因子之比取作 1。

练习　　设$(z_1, z_2; z_3, z_4) = \lambda$，验证 $(z_2, z_1; z_3, z_4) = (z_1, z_2; z_4, z_3) = \lambda^{-1}$；$(z_1, z_3; z_2, z_4) = 1 - \lambda$；$(z_3, z_4; z_1, z_2) = \lambda$。

命题　　扩充复平面上，保向的 Möbius 变换保持复交比不变，而反向的 Möbius 变换把复交比变成其复共轭。

证明　　只需证明反演变换σ把复交比变成其复共轭，即

$$\big(\sigma(z_1), \sigma(z_2); \sigma(z_3), \sigma(z_4)\big) = \overline{(z_1, z_2; z_3, z_4)}。$$

由反演变换的复坐标表达式可以立即验证。□

命题　　扩充复平面上，互异四点共圆（包括无穷大圆）当且仅当它们的复交比是实数。

证明　　如果互异四点共圆，考虑关于公共圆的反演，则四点在反演下不动，于是复交比在复共轭下不变，因而总是实数。反之，如果互异四点不共圆，我们可以作适当的反演和平移、旋转把其中三点决定的圆变成扩充的实轴，而使第四点虚部非零。由定义易见，这时的复交比不再是实数。□

关于扩充复平面和它的 Möbius 变换，以上的讨论让我们积累了不少经验知识。下一步的打算就是把注意力集中在保向的 Möbius 变换，详细分析它们的特征，并且刻画它们组成的变换群的结构。