群的初步知识

这篇笔记里，我们介绍群论的基本概念和例子。这里的术语都是标准的。

定义　我们所谓的集合G上的一个*群结构*，包括如下信息：（1）一个特定的元素$e \in G$，称为*恒等元*；（2）一个二目运算$G \times G \to G$ 称作*乘法*，记作$(g,h) \mapsto gh$；（3）以及一个单目运算$G \to G$称作*取逆*，记作: $g \mapsto g^{-1}$。而且，它们被要求满足：（1）恒等元是乘法的左右单位，即对于任意$g \in G$，有 $eg = ge = g$；（2）乘法满足结合律，即对于任意$g,h,k \in G$，有$(gh)k = g(hk)$；（3）取逆运算给出乘法的左右逆元，即对于任意$g \in G$，有 $g^{-1}g = gg^{-1} = e$。指定了群结构的集合G就称为一个抽象的*群*。

练习　验证就任何群而言，其乘法的左右单位必唯一，其乘法的左右逆元必唯一，乘积的取逆等于取逆的反序乘积，取逆再取逆等于恒同。

例　设X是一个集合，则全体可逆映射$\sigma: X \to X$组成一个群 $\mathrm{Perm}(X)$，即X的*置换群*（group of permutations）：恒同变换是其恒等元，映射的复合是其乘法，映射的取逆是取逆运算。特别地，有限集合$\{1,2 \cdots, n\}$的置换群称为n*元对称群*（symmetric group on n elements），通常记作S_n。（我们之前也定义过度量空间中的图形的保距对称群，由于上下文完全不同，但愿不至于混淆。）S_n中的元素常常记作

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix}$$

的形式，下边行是上边行的一个排列，意思是$\sigma(k) = i_k$。因为我们的映射遵循左式记号，即$(\sigma\tau)(k) = \sigma(\tau(k))$，所以，记号的乘法形如：

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

例　设X是一个集合，A是其子集，则所有保持A不变的置换（即满足$\sigma(A) = A$者）构成也一个群，称为置换群 $\mathrm{Perm}(X)$的关于A的*稳定化子群*（stabilizer）。这个构造给出置换群的许多子群的例子，但不是全部。比如*轮换*（rotation）

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & \cdots & n & 1 \end{pmatrix}$$

生成的群实际上由置换$\mathrm{Id}, \tau, \tau^2, \cdots, \tau^{n-1}$构成，它却没有非平凡的不变子集合。和它同构的群称为n*阶循环群*（cyclic group of order n），通常记作C_n。（就有限群而言，其作为集合的元素个数即称为这个群的阶。）

定义　两个群G、H之间的一个*同态*就是一个保持乘法的映射$\phi: G \to H$，即对于任意$g, g' \in G$，有$\phi(gg') = \phi(g)\phi(g')$。

练习　验证群同态把恒等元映到恒等元，互逆元素映到互逆元素。

例　设G是一个群，X是一个集合。群G在X上的一个*作用*（action）是这样的一个映射$\alpha: G \times X \to X$，写作$(g,x) \mapsto \alpha_g(x)$，要求满足$\alpha_{gh}(x) = \alpha_g(\alpha_h(x))$。群在集合上的每个作用

可以等价地刻画为一个同态$\phi: G \to \mathrm{Perm}(X)$：给定群作用，我们可以定义置换$\phi(g): X \to X$为$x \mapsto \alpha_g(x)$；反过来，任何同态$\phi: G \to \mathrm{Perm}(X)$也唯一地给出群作用$(g,x) \mapsto \phi(g)(x)$。这个两个过程是自然而且互逆的。

例 设G是一个群。它在自己上有三个自然的作用：*左作用* $L_h(g) = hg$，*右作用*$R_h(g) = gh^{-1}$，以及*共轭作用*$\sigma_h(g) = hgh^{-1}$（conjugation）。但是，注意$R_h^*(g) = gh$给出的并非我们所谓的作用，因为它在复合下是反变的：$R_{hk}^*(g) = R_k^*\big(R_h^*(g)\big)$。

练习 对于任意群同态$\phi: G \to H$，验证它的核

$$\mathrm{Ker}(\phi) \coloneqq \{g \in G: \phi(g) = e \in H\}$$

构成一个群，且它在共轭作用下不变，即对于任意$\mathrm{g} \in \mathrm{G}$，有$\sigma_{\mathrm{g}}\big(\mathrm{Ker}(\phi)\big) = \mathrm{Ker}(\phi)$；它的像

$$\mathrm{Im}(\phi) \coloneqq \{\phi(g) \in H: g \in G\}$$

也构成一个群。

定义 给定群G的一个*子群*H是一个在乘法和取逆下封闭的子集合，并由此而具有继承的群结构。如果群G有一个子群H，则H的一个*左陪集*是群G关于等价关系$g \sim g' \Leftrightarrow \exists h \in H: g = g'h$的等价类，它们形如子集$gH = \{gh \in G: h \in H\}$。*右陪集*的定义类似，形如$Hg = \{hg \in G: h \in H\}$。

定义 如果G的一个子群N在G的共轭作用下不变，就称之为一个*正规子群*。设N是G的正规子群，则N-陪集（coset）的集合

$$G/N \coloneqq \{gN \subset G: g \in G\}$$

关于诱导的乘法$(gN)(hN) = (gh)N$构成的群称为G模N的*商群*。

练习 验证正规子群的左陪集都是同样代表元素的右陪集。

练习 验证商群的乘法定义是合理的，即与陪集代表元选取无关。

于是下述定理无非是前边练习的重新概括：

定理 设N是G的正规子群，则存在自然的群同态短正合列（short exact sequence）

$$\{e\} \longrightarrow N \xrightarrow{\iota} G \xrightarrow{\pi} G/N \longrightarrow \{\mathrm{e}\}$$

意即在同态的接合处，前一同态的像都等于后一同态的核。具体就是说，ι是单同态（放入），π是满同态（取模），并且 $\mathrm{Im}(\iota) = \mathrm{Ker}(\pi)$。

我们似乎要结论说，如果知道了给定群的一个正规子群和它的相应商群，我们就知道了给定群的结构。然而这是不正确的。比如，如果一个群有一个正规子群同构于C_4，其商群又同构于C_2，那么这个群可能是C_8，也可能是$C_4 \times C_2$，或者二面体群D_4（正方形的保距对称群）。这里，我们遇到了所谓的扩张问题。

一种比较简单的情形是，如果G刚好还有一个子群H，它在模N的商同态下是到G/N的同构。这时H的元素刚好作为代表元不重复不遗漏地枚举N的陪集，所以G中元素都可以唯一地写成$g = nh$的形式，其中$n \in N, h \in H$。这样我们说G是一个*半直积*，写作$N \rtimes H$。作为集合，G可以等同为集合的直积$N \times H$，但等同之下的乘法，容易验证，形如

$$(n,h)(n',h')=(n\sigma_h(n'),hh')$$

这表明N分量的乘法要经受H的一次共轭作用。

注记　　更一般地，任给群N,H，以及同态$\alpha\colon H\to\mathrm{Aut}(N)$，我们可以定义抽象的*半直积* $N\rtimes_\alpha H$为集合$N\times H$并赋予乘积$(n,h)(n',h')=(n\alpha_h(n'),hh')$。比如，$C_4$的自同构只有两个，一个是恒同，另一个非平凡的α刚好是C_4的取逆，它们定义的抽象的半直积分别同构于直积$C_4\times C_2$和二面体群D_4。