平面二次曲线的等距分类

这篇笔记里，我们以平面二次曲线的分类为例，展示标准型和不变量两种不同的方法，借以呈现坐标几何学和变换群几何学两种不同的视角。参见 [尤，第三章] 和 [王，第三章第 3 节]。

平面二次曲线

定义 在平面笛卡尔坐标系下，一般的*平面二次曲线*是由方程

$$\Gamma: Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

定义的点集，其中系数都是实数且二次项系数不全为零。

例 1（1）标准的椭圆或双曲线方程

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$$

以及标准的抛物线方程

$$x^2 = 2py$$

都可以整理成一般方程的形式，所以它们都是平面二次曲线的例子，统称为*圆锥曲线*。

（2）形如

$$(ax + by + c)^2 = h$$

的方程也给出平面二次曲线的例子，根据右边为正、为零、或者为负，解集分别是两条平行直线、一条直线、或者空集。

（3）形如

$$(a_1x + b_1y + c_1)(a_2x + b_2y + c_2) = 0$$

的方程，如果$a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$，则解集是两条相交直线。

（4）形如

$$(x - p)^2 + (y - q)^2 = 0$$

的方程，解集是一个点。

（5）如果$ad - bc \neq 0$，线性代换（仿射坐标变换）

$$\begin{cases} x = a\tilde{x} + b\tilde{y} + h \\ y = c\tilde{x} + d\tilde{y} + k \end{cases}$$

并不降低方程的次数。这样我们还可以得到更多具体的平面二次曲线。

（6）把方程系数都乘以相同的非零倍数并不改变所定义的平面二次曲线。

上面的例子表明平面二次曲线具有多种多样的形态。这里的复杂性一方面来自系数域的限定（实数而不是复数，如例 1（2）所见），一方面来自方程的系数随次数的增多（对比平面一次曲线或高次曲线）。

问题 给定平面二次曲线的方程，如何判断曲线的形状？

具体来讲，我们首先想知道：通过坐标变换是否可以把曲线方程整理为例 1（1）—（4）中的形式之一。由于不愿改变曲线的形状（比如圆锥曲线的准焦距、准焦比等度量特征），我们打算只使用（保向的）等距坐标变换。这种理解下，问题 3 其实是希望用移轴和转轴把曲线的方程化成标准型。

换个角度设问：能否不借助标准化，仅通过系数的某些函数就确定曲线的特征，甚至能否要求这些函数在等距坐标变换下保持不变？这样的函数被称为曲线方程(或二元二次多项式）关于等距坐标变换的代数不变量。注意到例 1（6），我们说方程的代数不变量并不完全等同于曲线的几何不变量。不过，新的设问已经体现出变换群几何学的主要计划，即通过不变量来完成对象的分类。

用移轴和转轴完成坐标方程的标准化

仿射坐标变换的实质是重新选定平面的仿射标架。通过重选标架，点的坐标变为新坐标系下的坐标，曲线的方程变为新坐标系下的方程。所谓移轴和转轴就是通过平移和旋转旧标架获得新标架。这两种变换都是标架的保定向、保内积的变换。我们首先需要知道诱导的坐标和方程变换的形式。

为了合乎更一般的处理，我们把方程 Γ 改写成矩阵形式

$$u^{\mathrm{t}}Qu=0，$$

其中

$$u=\begin{pmatrix}x\\ \mathrm{y}\\ 1\end{pmatrix}$$

是列向量（记号 t 表示转置），而

$$Q=\begin{pmatrix}A & B & D\\ B & C & E\\ D & E & F\end{pmatrix}$$

是三阶对称矩阵。

通过移轴和转轴实现的坐标变换

$$\tilde{u}=\begin{pmatrix}\tilde{x}\\ \tilde{y}\\ 1\end{pmatrix}$$

具有一般的形式

$$u=S\tilde{u}，$$

其中

$$S=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & \xi\\ \sin\theta & \cos\theta & \eta\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}。$$

新坐标下的方程形如

$$\tilde{u}^{\mathrm{t}}\tilde{Q}\tilde{u}=0，$$

其中

$$\tilde{Q}=S^{\mathrm{t}}QS，$$

用线性变换的语言，新的对称矩阵与原先相差一个合同变换。

注记　这里使用的变换相当于旧标架 $(O;\ \boldsymbol{e_1},\ \boldsymbol{e_2})$ 换为新标架

$$(O+\xi\boldsymbol{e_1}+\eta\,\boldsymbol{e_2};\quad \boldsymbol{e_1}\cos\theta+\boldsymbol{e_2}\sin\theta,\quad -\boldsymbol{e_1}\sin\theta+\boldsymbol{e_2}\cos\theta)。$$

它和 [尤，第三章第 2 节] 保持一致。[王，第三章] 中出现的坐标变换在旋转部分与这里相差一个转置，是标架选取不同的缘故。

对曲线方程作标准化的一般手续如下：

（1）　用转轴消去交叉项。这样 B 变成了零，A 可以要求非零。运用待定系数法，可以导出当 $B\neq 0$ 时转轴需要的角度 θ 可以根据

$$\cot 2\theta=\frac{A-C}{2B}$$

选取。

（2）　用移轴尽量消去一次项。假定 $B=0$，由于 A 不是零，总可以把 D 变成零，C 非零时还能把 E 变成零。运用配方，可以导出

$$\xi=-\frac{D}{A},$$

以及

$$\eta=-\frac{E}{C}，当\ \mathrm{C}\neq 0，（双曲线或椭圆中心置为原点）$$

或者

$$\eta=\frac{D^2}{2AE}-\frac{F}{2E}，当\ C=0,E\neq 0，（抛物线顶点置为原点）$$

或者

$$\eta=0，当\ \mathrm{C}=0,E=0。（退化情形）$$

（3）　稍加整理，最后获得的形式就是平面二次曲线方程的标准型。它可能是如下诸情形之一：椭圆、单点、（空集、）双曲线、一对相交直线、抛物线、一对平行直线、一条直线。

以上步骤详见 [尤，第三章第 2 节]。需要注意的是，由于转轴后系数已经变化，我们不能直接从最初的系数写出移轴的参数，也不能直接把转轴和移轴的参数合抄到一个变换矩阵里。

注记　对于平面二次曲线的标准化来讲，矩阵处理还没有体现出特别明显的优势，因为待定系数法相对容易操作。高维空间的二次超曲面的标准化问题，相应的步骤（1）（即二次齐次部分的标准化）更系统的处理是利用线性代数中对称二次型的（正交）对角化。

用代数不变量判定曲线的类型

从方程的矩阵形式可以立即导出三个（移轴和转轴的）代数不变量，它们分别是二次齐次部分的迹、二次齐次部分的行列式和完全的行列式：

$$I_1=A+C,\quad I_2=AC-B^2,\quad I_3=\det Q。$$

命题　I_1，I_2，I_3 是方程 Γ 关于移轴和转轴的不变量。

证明 手动的验证参见 [尤，第三章命题 3.3] 或 [王，第三章定理 3.3]。作为一般性的原因，我们注意三阶方阵 Q 左上角的二阶子阵，即它的二次齐次部分，在坐标变换 S 下的改变只依赖于 S 左上角的二阶子阵，即它的旋转部分。后者是正交矩阵，转置等于取逆；特别地，它给出的矩阵的合同变换就是相似变换。所以 Q 的二次齐次部分的迹 I_1 和行列式 I_2 都是在正交矩阵的合同下的不变量。至于 I_3，它的不变性来自 S 的行列式之为 1。□

思考 为什么 $\operatorname{tr} Q$ 居然不是不变量？

通过与前面的标准型逐一比对，我们就得到下面的判则。

定理 通过方程的代数不变量判别平面二次曲线的类型如下：

$I_2 > 0$ 椭圆型	$I_1 I_3 < 0$ 椭圆
	$I_1 I_3 > 0$ 空集
	$I_3 = 0$ 单点
$I_2 < 0$ 双曲型	$I_3 \neq 0$ 双曲线
	$I_3 = 0$ 一对相交直线
$I_2 = 0$ 抛物型	$I_3 \neq 0$ 抛物线
	$I_3 = 0$ 一对平行直线、一条直线、或空集

注记 最后一种情形的详细判定可以利用半不变量 $K_1 = (AF - D^2) + (CF - E^2)$，其等距不变性依赖于前提 $I_2 = I_3 = 0$。详见 [尤，第三章第 3.4 小节]。

圆锥曲线的几何特征

在平面二次曲线中，圆锥曲线是显得最有趣的一类，也是古典几何的深入讨论过的对象。在古典几何中，圆锥曲线被定义为平面与（正的或斜的）圆锥相截得到的曲线。只考虑正圆锥的情形，我们在三维欧氏几何的典范模型中可以把一个正圆锥面写成方程

$$C:\ z^2 = k^2(x^2 + y^2),$$

其中$k > 0$是母线与 XY 平面夹角的正切值。任何不通过原点的平面 Π 与圆锥面 C 相交得到的截口就是平面上的一条圆锥曲线。根据平面 Π 与 XY 平面夹角小于、等于、或者大于母线与 XY 平面的夹角，截口分别是椭圆、抛物线、或者双曲线。按照 M. Klein 的说法，在 Euclid 和 Appollonius 的时代，人们就已经知道圆锥曲线可以等价地定义成平面上到定点和定直线距离之比为常数的点的轨迹，[《古今数学思想》，第 1 册第 4 章]。其中定点称为焦点，定直线称为准线，常数称为离心率，焦点和准线的距离称为准焦距。显然，这些量和性质并不依赖于我们如何在平面上选取单位正交标架，又进而写出曲线的方程，所以它们是曲线的（等距）几何量和（等距）几何性质，统称为度量特征。

由于单位正交标架是一类特殊的仿射标架，圆锥曲线的度量特征中有一部分是继承自它们的仿射特征。这些特征是仿射坐标变换（例 1（5））下就不变的性质，比如圆锥曲线的类型，中心位置，双曲线的渐近方向或抛物线的开口方向，等等。还有一些特征则是度量意义下特有的，比如对称轴的位置，焦点和准线，椭圆的长短轴或双曲线的实虚轴，等等。

对于圆锥曲线而言，我们由前面的讨论知道：通过方程的代数不变量 I_1，I_2，I_3 可以完全写出方程的标准型。所以，那些数量型的度量特征，比如准焦距和离心率，都是可以通

过这些代数不变量表达出来的。在这个意义上，我们可以说这三个代数不变量决定着圆锥曲线的形状。然而它们似乎不是最经济的，由于有例 1（6）的缘故。