

作业十二

题 1 求证在双曲平面的上半平面模型中，保向的保距变换都形如

$$\phi(z) = \frac{az + b}{cz + d}, (a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc = 1)$$

而反向的保距变换都形如

$$\phi(z) = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}, (a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc = -1)$$

(提示：可以观察关于测地线的双曲反射的表达式)。

题 2 求证双曲三角形的三条角平分线共点，且交点是双曲度量下内切圆的圆心。

题 3 给定双曲平面的两条不相交的测地线，求证它们至多有一条公垂线。举出公垂线不存在的例子。

题 4 当双曲正八边形的内角为 $\pi/4$ 时，计算其边长的双曲余弦值。

题 5 当 $h \rightarrow +\infty$ 时，问上半平面的点 $1 + hi$ 和 $-1 + hi$ 之间的双曲距离如何变化？当 $h \rightarrow 0^+$ 时又如何变化？

题 6 在双曲平面 \mathbf{H}^2 上，任何有序互异点对 A, B 决定的双曲平移

$$\tau_{AB}: \mathbf{H}^2 \rightarrow \mathbf{H}^2$$

是如下的保向的保距变换：它保持两点所在的测地线不变，没有不动点，并且把点 A 变到点 B 。如果 A, B, C 是双曲三角形的顶点，求证复合变换 $\tau_{CA} \circ \tau_{BC} \circ \tau_{AB}$ 以点 A 为唯一的不动点。

(提示：对于任意点 P ，考虑测地线段 AP 的运动。)