

# 作业十：实射影平面的齐次坐标几何。

我们把实射影平面 $\mathbb{R}P^2$ 看作三维实向量空间 $\mathbb{R}^3$ 的全体一维子空间的集合，则它的每一个点具有一个典范的齐次坐标。具体来讲，由 $\mathbb{R}^3$ 中的非零向量

$$(x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$$

张成的一维子空间，作为 $\mathbb{R}P^2$ 中的点，它用齐次坐标就记作

$$[(x_1, x_2, x_3)^T] \in \mathbb{R}P^2。$$

于是，任何相差非零实因子 $\lambda \neq 0$ 的两个齐次坐标 $[(x_1, x_2, x_3)^T]$ 和 $[(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3)^T]$ 就被视为表示相同的点。

实射影平面上的 $\mathbb{R}P^2$ 每一条线也有诱导的齐次（对偶）坐标。具体来讲，所有满足齐次实线性方程（系数不全为零）

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$$

的点 $[(x_1, x_2, x_3)^T]$ 组成的线，它的齐次坐标就写成

$$[(a_1, a_2, a_3)] \in (\mathbb{R}P^2)^*。$$

其中 $(\mathbb{R}P^2)^*$ 表示 $\mathbb{R}P^2$ 的全体线的集合。注意我们约定点的齐次坐标用列记号，线的齐次坐标用行记号。

**题 1** 判断下列四点是否处于一般位置（即没有三点共线）：

$$[(-1, 2, 1)^T], [(-3, 4, -1)^T], [(1, 0, -1)^T], [(5, -4, 2)^T]。$$

**题 2** 给定线 $l_1, l_2, l_3, l_4, l_5$ 分别为

$$[(1, 2, 3)], [(2, -1, -1)], [(0, 1, 1)], [(-1, 1, 0)], [(1, 5, 3)],$$

记 $l_1$ 与 $l_2$ 的交点为 $A$ ， $l_3$ 与 $l_4$ 的交点为 $B$ 。

- 1) 计算连线 $AB$ 与 $l_5$ 的交点 $C$ 。
- 2) 计算点 $A, B, C$ 的第四调和点 $D$ 。

**题 3** 对于齐次参数 $[(s, t)] \in \mathbb{R}P^1$ ，验证齐次参数曲线 $[(s^2, st, t^2)^T] \in \mathbb{R}P^2$ 给出一条射影圆锥曲线的参数化。

- 1) 计算点 $[(1, 1, 3)^T]$ 的极线。
- 2) 判断此点是否在曲线内部。

**题 4** 每一个三阶可逆实矩阵 $S \in GL(3, \mathbb{R})$ 给出一个射影变换 $\mathbb{R}P^2 \rightarrow \mathbb{R}P^2$ ，在齐次坐标上形如

$$[X] \mapsto [SX]。$$

- 1) 证明可逆数量矩阵构成 $GL(3, \mathbb{R})$ 的正规子群。把商群记作 $PGL(3, \mathbb{R})$ 。
- 2) 证明上述变换诱导了一个 $PGL(3, \mathbb{R})$ 在 $\mathbb{R}P^2$ 上的群作用。
- 3) （选做）试证明 $\mathbb{R}P^2$ 的每一个射影变换都能够并且唯一地由 $PGL(3, \mathbb{R})$ 中的元素实现。

**题 5** 分别求满足以下要求的 $\mathbb{R}P^2$ 的射影变换，用一个矩阵 $S \in GL(3, \mathbb{R})$ 写出。

- 1) 要求把四点

$$A_1 = [(1, 0, 0)^T], A_2 = [(0, 1, 0)^T], A_3 = [(0, 0, 1)^T], A_4 = [(1, 1, 1)^T]$$

相应地变换到

$$B_1 = [(1, 0, 1)^T], B_2 = [(1, 2, 2)^T], B_3 = [(-1, 1, 2)^T], B_4 = [(7, 0, 2)^T].$$

2) 要求把四点

$$P_1 = [(1, 0, 0)^T], P_2 = [(1, 1, 0)^T], P_3 = [(1, 1, 1)^T], P_4 = [(4, 2, 1)^T]$$

相应地变换到

$$Q_1 = [(1, -1, -1)^T], Q_2 = [(0, 1, -1)^T], Q_3 = [(0, 0, 1)^T], Q_4 = [(1, -2, 1)^T].$$

(提示: 参考[尤, 第五章第 5.1 小节], 命题 5.7 的证明与例 5.7。)