作业六

题 1　　考虑空间中直线

$$l_0 : \begin{cases} 3x = 2y \\ z = 0 \end{cases}$$

使其绕直线

$$\mathrm{k}: x = y = z$$

旋转一周，获得圆锥面S。

（1）　写出曲面S的方程并画图。

（2）　描述所有保持S不变（作为点集）的空间保距变换，并说明理由。

题 2　　曲面$S: x^2 + y^2 + xy - 2xz - yz = 0$是否是正圆锥？说明理由。

题 3　　空间中单位立方体$ABCD - A'B'C'D'$,（其中$ABCD$是一个侧面正方形，而$A'B'C'D'$是其对侧正方形，对应顶点相邻）。

（1）　考虑所有与边$AA', B'C', CD$所在的三条直线同时相交的直线。它们的并集构成哪种（仿射）二次曲面？请说明理由。

（2）　决定并描述包含直线AA'的那一族直母线。

题 4　　给定空间中的单位立方体P（作为包含全体顶点、边、面、内部点的点集），所有保持P不变的空间保距变换总共有多少个？用比较简明的语言枚举它们全部。

题 5　　平面旋转变换ϕ_1, ϕ_2分别以O_1, O_2为中心，问$\phi_1 \circ \phi_2 = \phi_2 \circ \phi_1$何时成立？说明理由。

题 6　　假设$A, B, C, D \in \mathbf{E}^3$是处于一般位置（即不共面）的四个点，用$L_A: \mathbf{E}^3 \to \mathbb{R}$表示一个线性函数，满足$L_A(A) = 1$，$L_A(B) = L_A(C) = L_A(D) = 0$；$L_B, L_C, L_D: \mathbf{E}^3 \to \mathbb{R}$也作类似理解。试找出所有保持四点$A, B, C, D$（作为集合）不变的空间仿射变换，使得由方程$L_A + 2L_B + L_C + 2L_D = 0$定义的平面也保持不变。说明理由。