

作业六

题1 考虑空间中直线

$$l_0: \begin{cases} 3x = 2y \\ z = 0 \end{cases}$$

使其绕直线

$$k: x = y = z$$

旋转一周, 获得圆锥面 S 。

- (1) 写出曲面 S 的方程并画图。
- (2) 描述所有保持 S 不变(作为点集)的空间保距变换, 并说明理由。

题2 曲面 $S: x^2 + y^2 + xy - 2xz - yz = 0$ 是否是正圆锥? 说明理由。

题3 空间中单位立方体 $ABCD - A'B'C'D'$, (其中 $ABCD$ 是一个侧面正方形, 而 $A'B'C'D'$ 是其对侧正方形, 对应顶点相邻)。

- (1) 考虑所有与边 $AA', B'C', CD$ 所在的三条直线同时相交的直线。它们的并集构成哪种(仿射)二次曲面? 请说明理由。
- (2) 决定并描述包含直线 AA' 的那一族直母线。

题4 给定空间中的单位立方体 P (作为包含全体顶点、边、面、内部点的点集), 所有保持 P 不变的空间保距变换总共有多少个? 用比较简明的语言枚举它们全部。

题5 平面旋转变换 ϕ_1, ϕ_2 分别以 O_1, O_2 为中心, 问 $\phi_1 \circ \phi_2 = \phi_2 \circ \phi_1$ 何时成立? 说明理由。

题6 假设 $A, B, C, D \in \mathbf{E}^3$ 是处于一般位置(即不共面)的四个点, 经过点 BCD 的平面由一个线性方程 $L_A(x, y, z) = 0$ 给出, L_B, L_C, L_D 也作类似理解。

- (1) 求证: 空间中任意平面都可以写作如下方程形式

$$aL_A(x, y, z) + bL_B(x, y, z) + cL_C(x, y, z) + dL_D(x, y, z) = 0$$

其中 $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ 是不全为零的适当系数。

- (2) 试找出所有保持四点 A, B, C, D (作为集合)不变的空间仿射变换, 使得由方程 $L_A(x, y, z) + 2L_B(x, y, z) + L_C(x, y, z) + 2L_D(x, y, z) = 0$ 定义的平面也保持不变。说明理由。