

作业十三

题 1 双曲三角形 ABC , 对边相应记 a, b, c 。用你认为合理的方式, 说明当边长都很小时, 双曲正弦定理

$$\frac{\sinh a}{\sin A} = \frac{\sinh b}{\sin B} = \frac{\sinh c}{\sin C}$$

和双曲余弦定理

$$\cosh c = \cosh a \cosh b - \sinh a \sinh b \cos C$$

近似地给出欧氏的正弦定理和余弦定理。

题 2 双曲三角形 ABC , 对边相应记 a, b, c 。假设顶角 C 是直角, 求边 AB 上的高, 即顶点 C 到边 AB 所在测地线的距离。

题 3 求证: 给定的长度值 $a, b, c > 0$ 可作为边长构成双曲三角形, 当且仅当不等式 $a + b > c, b + c > a, c + a > b$ 都成立; 给定的角度值 $A, B, C > 0$ 可作为内角构成双曲三角形, 当且仅当不等式 $A + B + C < \pi$ 成立。

题 4 一个理想双曲三角形是双曲平面上互不相交的三条测地线的并集, 并且在共形圆盘模型上, 它们看起来是首尾相接于单位圆盘边界的三段圆弧。说明所有的理想双曲三角形都互相双曲保距等价。

题 5 假设 $\phi: \mathbf{H}^2 \rightarrow \mathbf{H}^2$ 是双曲平面的保距变换。求证: 如果存在常数 $C > 0$, 而且对于任何点 $P \in \mathbf{H}^2$, 都有 $d_H(\phi(P), P) < C$ 成立, 那么 ϕ 只能是恒同变换。(思考: 对于球面和欧氏平面, 相应的结论如何?)

题 6 对于行列式为1的二阶整数矩阵构成的矩阵乘法群 $SL_2(\mathbb{Z})$ (通常称为模群), 考虑它在上半平面 \mathfrak{H} 的分式线性变换作用。设 $B_\infty = \{z \in \mathfrak{H}: \text{Im}(z) > 1\}$ 是虚部大于1的区域。

- (1) 求证: 对于任意的有理数 $r \in \mathbb{Q}$, 存在一个 $A \in SL_2(\mathbb{Z})$, 使得其分式线性变换作用把 B_∞ 变成与实轴相切与点 r 的一个欧氏开圆盘 B_r ;
- (2) 求证: 所有这些 B_r 还有 B_∞ 的内部两两不相交。
- (3) 每个有理数都可以展开为连分数

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_n}}}$$

其中 a_0 是整数, 其余 a_i 是正整数。如果知道了 $r \in \mathbb{Q}$ 的(一个)连分数展开, 请找出一连串变换 $T(z) = z + 1$ 和 $S(z) = -1/z$, 或它们的逆, 使它们的依次作用将 B_∞ 最终变到 B_r 。