作业三

题 1 设M是光滑流形。对于任何$X \in \mathfrak{X}(M)$，定义运算$\iota_X: A^r(M) \to A^{r-1}(M)$，方式是“将$X$安插在第一项”，即对于任何$\omega \in A^r(M)$，定义

$$(\iota_X \omega)(Y_1, \cdots, Y_{r-1}) = \omega(X, Y_1, \cdots, Y_{r-1})$$

求证：

（1） $\iota_X(f \cdot \omega) = f \cdot \iota_X(\omega)$，其中$f \in C^\infty(M)$，$\omega \in A^r(M)$；

（2） $\iota_X(\omega \wedge \eta) = (\iota_X \omega) \wedge \eta + (-1)^{|\omega|} \cdot \omega \wedge (\iota_X \eta)$，其中$\omega \in A^r(M)$，$\eta \in A^s(M)$，记号$|\omega| = r$。

外形式的李导数$\mathcal{L}_X: A^r(M) \to A^{r+1}(M)$定义见作业二题 9。

题 2 设M是光滑流形。求证 Cartan 的“魔术公式”（Magic Formula）：

$$\mathcal{L}_X = \iota_X \circ \mathrm{d} + \mathrm{d} \circ \iota_X$$

作为算子$A^r(M) \to A^r(M)$，其中$X \in \mathfrak{X}(M)$。

题 3 设M是光滑流形。求证：

$$\mathcal{L}_X \circ \mathrm{d} = \mathrm{d} \circ \mathcal{L}_X$$

作为算子$A^r(M) \to A^{r+1}(M)$，其中$X \in \mathfrak{X}(M)$。

题 4 设(M, g)是n维定向黎曼流形，$\big(U_\alpha, \varphi_\alpha = (x_1, \cdots, x_n)\big)$是与定向相容的图卡，令$g_\alpha$为$g$关于坐标基底的矩阵，即它在$U$的每点处$n$阶方阵，其$(i,j)$位置元素是$g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right)$。求证：

局部坐标表达式$\sqrt{\det(g_\alpha)}\, \mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_n$定义了$M$上的一个$n$次外微分形式，且处处非零（称为黎曼度量$g$决定的体积形式）。

题 5 求证：对于任何光滑流形上的函数$f \in C^\infty(M)$，$\mathrm{d}f \wedge \mathrm{d}f$总是零。

题 6 记$\mathbb{R}^{2n+1}$的分量坐标为$(x_1, y_1, \cdots, x_n, y_n, z)$，取$\alpha = \mathrm{d}z + x_1 \mathrm{d}y_1 + \cdots + x_n \mathrm{d}y_n$。求证：$2n+1$次微分形式$\alpha \wedge \mathrm{d}\alpha \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\alpha$处处非零。

题 7 记$\mathbb{R}^{2n}$的分量坐标为$(x_1, y_1, \cdots, x_n, y_n)$，取$\omega = \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}y_1 + \cdots + \mathrm{d}x_n \wedge \mathrm{d}y_n$。求证：$\omega$是闭形式，且处处非退化（即在任何点$p \in M$，若$v \in T_pM$使得$\omega(v, w) = 0$对所有$w \in T_pM$成立，则$v$是零向量）。

题 8 若光滑流形M上指定了处处非退化的 2 次闭微分形式$\omega \in A^2(M)$，则称(M, ω)为一个辛流形。求证：辛流形M的维数总是偶数$2n$，且$\omega \wedge \cdots \wedge \omega \in A^{2n}(M)$处处非零（称为辛结构$\omega$决定的体积形式）。

题 9 求证：$\mathbb{R}P^2$上没有辛结构。

题 10 求证：

（1） 若α和β都是闭形式，则$\alpha \wedge \beta$是闭形式。

（2） 若α是闭形式，β是恰当形式，则$\alpha \wedge \beta$是恰当形式。

题 11 设M是$\mathbb{R}^n$中光滑嵌入的$k+l+1$维定向、紧致子流形（不带边），$\omega \in A^k(W)$和$\eta \in A^l(W)$定义在M的某个开邻域$W \subset \mathbb{R}^n$上。求证：存在常数$a \in \mathbb{R}$，使得

$$\int_M \omega \wedge \mathrm{d}\eta = a \int_M \mathrm{d}\omega \wedge \eta$$

成立。确定a的值。

题 12 光滑辛流形(M,ω)上的一个相容的近复结构是切丛的一个自同构$J: TM \to TM$，（即J在每点$x \in M$是切空间T_xM的线性自同构），并且要求它满足：（1）近复条件：对于任意$x \in M$及$v \in T_xM$，$J\big(J(v)\big) = -v$成立；（2）相容条件：对于所有$x \in M$及$u,v \in T_xM$，表达式$g(u,v) = \omega(Ju,Jv)$给出M上的一个光滑黎曼度量。求证：假设M紧致，那么与ω相容的近复结构总是存在。（提示：如果遇到困难，试查找相关资料，参阅解决。）