拓扑空间的初步知识

在这篇笔记里，我们介绍拓扑空间及其同胚，常见的拓扑性质。文末有习题。

在常见的几何空间中谈论拓扑

前边我们已经讨论过不少几何空间。对于它们的拓扑，我们并非全无感觉。我们多少可以在这些空间中领会诸如某点的附近、点列的极限、图形的连续形变之类的概念，比如下面一些例子：

（1） 仿射空间的仿射变换、射影平面的射影变换、扩充复平面的 Möbius 变换、度量空间的保距变换，它们看上去都不会改变点列收敛或不收敛到某点的性质。

（2） 射影平面上的一条射影圆锥曲线看上去会把射影平面分为内外两部分，而一条射影直线则不然。

（3） 就点的邻近关系整体地讲，扩充复平面看上去与单位球面、比起与射影平面来更像一些。实际上，通过球极投影，它可以跟前者建立很好的双射对应。而它跟后者相比，我们可以指出这样的区别：射影平面移除一点后好像没有边界的 Möbius 带，但球面移除一点则好像没有边界的圆盘。（事实上，射影圆盘和球面的 Euler 示性数分别是1和2。）

为了用合适的数学语言讨论上面的问题，我们有必要规定诸如邻域、连续这样的概念，为它们赋予确切的数学含义。我们还需要许多术语来描写拓扑空间的性质，比如下边将提到的连通性、分离性、紧致性。这些术语大量出现在今天的数学中，使我们得以方便地讨论各种几何空间的局部和整体性质，并且揭示它们对于空间结构的深刻影响。

拓扑空间及其同胚

定义　任意给定集合X上的一个*拓扑结构*（简称*拓扑*）是X的某些特定子集组成的集合$\mathcal{T} \subset 2^X$，其中那些特定子集称为$\mathcal{T}$所声明的开集，并且要求满足如下性质（开集公理）：（1）空集和全集是开集，即$\emptyset, X \in \mathcal{T}$；（2）任意多的开集的并集是开集，即对于任意$\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$，有$\bigcup_{U \in \mathcal{S}} U \in \mathcal{T}$；（3）有限多个开集的交集是开集，即对于任意$U_1, \cdots, U_n \in \mathcal{T}$，有$U_1 \cap \cdots \cap U_n \in \mathcal{T}$。指定了拓扑结构的集合就称为一个*拓扑空间*。

定义　拓扑空间X的任何一个开集的补集就称为一个*闭集*，即$V \subset X$是闭集当且仅当$X \setminus V$是开集。于是声明拓扑空间等价于声明其所有闭集，并使满足如下性质（闭集公理）：（1）空集和全集是闭集；（2）任意多的闭集的交集是闭集；（3）有限多个闭集的并集是闭集。

例　任意度量空间(X, d_X)都自然有一个*由度量诱导的拓扑结构*。对于任意点$x \in X$，把中心在x、半径为$\epsilon > 0$的度量开球记为$B_\epsilon(x) = \{y \in X : d_X(x, y) < \epsilon\}$。我们声明$X$的开集是所有所有这样的子集$U \subset X$，对每一点$x \in U$，存在视$x$而定的半径$\epsilon > 0$使得$B_\epsilon(x) \subset U$。验证留作练习。特别地，欧氏度量拓扑给出的就是实分析中常见的$\mathbb{R}^n$的开集以及闭集，所以它就是实空间的点集拓扑。

例　拓扑空间的子空间都有通过限制获得的拓扑结构。具体来讲，如果Y是拓扑空间X的子集，它的子空间拓扑所声明的开集就是所有形如$Y \cap U$的子集，其中U是X的开集。例如，我们通常就把三维欧氏向量空间的单位球面的拓扑理解为它的*子空间拓扑*。

练习　　在双曲平面的共形圆盘模型中，复平面的单位圆盘既具有子空间拓扑，又具有双曲度量的诱导拓扑，试说明这两个拓扑是相同的。

例　拓扑空间的商空间都有诱导的拓扑结构。具体来讲，如果拓扑空间X上有一个等价关系~，则其全部等价类$\bar{x} \subset X$组成的集合$\bar{X}$可以赋予一个拓扑，而开集被声明为所有这样的子集$\bar{U} \subset \bar{X}$，使得

$$\cup_{\bar{x}\in\bar{U}} \bar{x}$$

是X的开集。例如，三维欧氏向量空间的单位球面上把对径点视为等价，则其相应的商空间可以认同为实射影平面，即把任意直径指示的对径点对认同于线把模型中直径所在的直线。这样就可以为实射影平面赋予一个来自球面的商空间拓扑，我们姑且称它为实射影平面的点集拓扑。

例　如果拓扑空间的单点都是开集，则它的拓扑称为*离散拓扑*。这时所有的子集都是开集，空间看起来散落如星。例如，整数集从实数轴继承的子空间拓扑就是离散拓扑。若换作有理数集，则其单点并不是开集。这时的子空间拓扑是一种完全不连通拓扑，意思是除单点而外，非空子集都可以写作两个不相交的开集的并。另外，任何集合都可以被赋予平凡拓扑，即除空集和全集而外别无开集。平凡拓扑无聊至极，因为任何两点都无法用开集加以区分。

更抽象的对象也常常组成拓扑空间。比如实射影平面上的所有射影圆锥曲线，欧氏平面上的所有保距变换，等等，它们的空间都可以具有非常自然的拓扑结构，以使我们能够讨论其中对象的收敛和连续运动。为空间赋予拓扑还可能有多种合理的方案，比如，实射影平面和扩充复平面常见的拓扑就不止一种，单位区间上的全体光滑函数所组成的空间也有许多分场合采用的拓扑。

定义　　拓扑空间X、Y之间的一个*同胚*是这样的可逆映射$f: X \to Y$，它诱导两个拓扑之间的双射，即$U \subset X$是开集当且仅当$f(U) \subset Y$是开集。

注记　　更一般地，拓扑空间之间的连续映射是这样的映射，它满足开集的原像都是开集。由此同胚就是拓扑空间之间这样的双射，它自己和它的逆映射都连续。

练习　　证明一个拓扑空间的全体自同胚关于映射的复合构成群。（它是集合吗？）

练习　　证明度量空间的等距同构都是同胚。

练习　　证明平面仿射变换都是同胚。

常见的拓扑性质

所谓拓扑性质就是拓扑空间的同胚不变性质，它们是拓扑学感兴趣的话题。我们列举几

种。

定义　（连通性）一个拓扑空间称为是连通的，如果它不能写成两个非空开集的无交并。这等价于说空间的既开又闭的子集只有空集和全集。子空间的连通性则关于子空间拓扑而言。（关于包含关系）极大的连通子空间称为拓扑空间的一个连通分支。

命题　拓扑空间的不同连通分支互不相交，且它们全体的并集是全空间。

证明　我们首先说明：对于拓扑空间X两个连通子集C_1、C_2而言，如果$C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$，则$C_1 \cup C_2$也连通。事实上，假设$C_1 \cup C_2$是它的开子集$A$、$B$的无交并，则由$C_1$的连通性知$A$、$B$恰好有一个包含$C_1$，不妨设为$A$。由$C_2$的连通性，$A$、$B$也恰好有一个包含$C_2$，但既然$A$包含$C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$，所以$A$也包含$C_2$。这说明假设之下，$A = C_1 \cup C_2$而$B = \emptyset$，从而$C_1 \cup C_2$也连通。

于是，在集合X上可以建立二元关系~，定义为$x \sim x'$当且仅当存在X的连通子集C同时包含x、x'。二元关系~的反身性和对称性显然，传递性由前述即知，故它是X上的等价关系。全空间X当然是其全部等价类的无交并。我们观察到：X的非空连通子集一旦与某个等价类相交非空，就完全被包含在那个等价类中。

现在来说明：每一个等价类就是一个连通分支。一方面，任何等价类$\bar{x}$都是连通的。理由是否则的话，基于上述观察，分属$\bar{x}$的两个不相交的既开又闭集的两点无法同属于X的一个连通子集$C \subset \bar{x}$，就与等价关系~的定义矛盾。另一方面，基于同样的观察，没有更大的连通子集包含任何等价类$\bar{x}$。所以等价类都是连通分支。这样就完成了证明。□

练习　证明单位球面是连通的。

定义　（紧致性）一个拓扑空间称为是紧致的，如果任意开覆盖都有有限子覆盖。这就是说，如果$\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$是拓扑空间$X$的一族开集，且它们的并集是$X$，则其中存在有限多个，$U_1, \cdots, U_n \in \mathcal{S}$，且它们的并集是$X$。

命题　有限维实空间中的子空间是紧致的当且仅当它是有界且闭的。

证明　首先，紧致蕴含有界：对于给定的紧致点集K，我们用中心在整数各点、边长是 2 的方块开集覆盖K，紧致性表明有限多个这样的方块就已经足够。于是K包含在一个边长充分大的方块内部，所以是有界集。其次，紧致蕴含闭：只要对于给定的紧致点集K，说明任何不在K中的点x都具有与K不交的开邻域。对任何$y \in K$取半径为$d_E(x, y)/3$的开球，由于所有这些开球覆盖紧致集K，存在有限多个这样的开球覆盖K。将这有限多个开球的半径最大值记作r，容易验证以点x为中心、长度r为半径的开球与K不相交。由点x的任意性，可见K在$\mathbb{R}^n$中的补集是开集，即K是闭集。于是，$\mathbb{R}^n$中的紧致子集都是有界闭集。

反过来，$\mathbb{R}^n$中有界闭集的紧致性的论证必须归结到实数空间$\mathbb{R}$的完备性。我们对维数n作归纳法。

当$n = 1$时，我们需要说明$\mathbb{R}$的有界闭集K都是紧致的。假设有K的一族开集覆盖，由子空间拓扑的定义，这相当于是说有一族$\mathbb{R}$的开集$\mathcal{S}$，使得它们的并集包含K，而我们要说明$\mathcal{S}$的某个有限子族也具有这样性质。首先来说明$\mathcal{S}$的某个可数子族$\mathcal{S}'$也具有这样的性质。我们发现$\mathcal{S}$连同开集$W = \mathbb{R} \setminus K$构成$\mathbb{R}$的开集覆盖，但以每个有理点为中心都可以取定一个半径是有理数的开区间包含于至少一个$\mathcal{S} \cup \{W\}$中的成员。由于$\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$稠密，这样取定的可数多个有理开区间已经覆盖$\mathbb{R}$，对其每个抽取一个$\mathcal{S} \cup \{W\}$的成员，就构成$\mathbb{R}$的一个可数子覆盖，而

其中来自$\mathcal{S}$的成员构成K的可数子覆盖$\mathcal{S}'$。接下来说明对K的可数开集覆盖$\mathcal{S}' = \{U_i \subset \mathbb{R}\}_{i\in\mathbb{N}}$还具有一个有限的子覆盖。不然的话，我们会获得一列点$\{x_i \in K\}_{i\in\mathbb{N}}$ 使得每个x_i都落在$U_1, \cdots, U_i$之外。因为K是有界闭集，$\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$在K中有聚点$y \in K$，但那样每个包含y的开集U_m就都包含无数多个$\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$中的点。我们获得$\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$说明U_m至多只包含开始的m个点，因而矛盾。可见从$\mathcal{S}'$还能抽取出K的有限子覆盖$\mathcal{S}''$，我们就奠定了归纳的基础。

当$n > 1$时，归纳地假设$\mathbb{R}^{n-1}$的有界闭集都是紧致的。对于$\mathbb{R}^n$中的有界闭集K，设$\mathcal{S}$是$\mathbb{R}^n$的一族开集并且覆盖K，我们要从中抽取有限子覆盖。为此，把最后一个坐标分量为$t \in \mathbb{R}$的K的子集记作K_t。注意每个K_t都是超平面$\mathbb{R}^{n-1} \times \{\mathrm{t}\}$的有界闭集，而超平面都同胚于$\mathbb{R}^{n-1}$。对于每一个$K_t$，都可以通过归纳假设获得有限多个开集构成的$\mathcal{S}'_t \subset \mathcal{S}$覆盖$K_t$。而且，因为$K_t$每一个点都有一个在$\mathbb{R}^n$中的开球邻域包含在某个$U \in \mathcal{S}'_t$，对这些开球邻域用归纳假设可知$\mathcal{S}'_t$其实覆盖一个形如$K_t \times I_t$的有界集，其中$I_t \subset \mathbb{R}$是包含t的某个开区间。由于所有使得$K_t$非空的$t$构成$\mathbb{R}$的有界闭集$T$，运用归纳基础就可以抽取其中的有限多个$I_{t_1}, \cdots, I_{t_r}$覆盖$T$。容易验证，$\mathcal{S}'_{t_1} \cup \cdots \cup \mathcal{S}'_{t_r} \subset \mathcal{S}$就如愿地给出$K$的开集子覆盖。这样就完成了归纳。□

例　球面是紧致的，而平面不是紧致的。于是它们互不同胚。

练习　　证明实射影平面（关于其点集拓扑）是紧致的。

例　任何拓扑空间都可以通过单点紧化变成紧致的拓扑空间，方法如下。假设X是拓扑空间。令X^+为集合$X \cup \{\infty\}$，其中∞为额外的点。赋予X^+如下的拓扑结构，其开集要么为X的开集，要么形如$(X \setminus K) \cup \{\infty\}$，其中$K$是$X$的紧致子集。容易验证$X^+$是紧致空间。如果$X$本身是紧致的$X^+$就为它添加了一个单点连通分支$\{\infty\}$，而$\emptyset^+$就是单点空间。例如，扩充复平面可以看作平面的单点紧化而获得拓扑，并从而同胚于球面。

练习　　证明扩充复平面的 Möbius 变换都是同胚。

定义　　（*分离性*）一个拓扑空间称为是 Hausdorff *分离*的，（或T_2空间），如果对于任何互异的两点，存在两个分别包含各点的互不相交的开集。

如果我们把空间中一列点$\{x_n \in X\}_{n\in\mathbb{N}}$之收敛到一点$x_\infty \in X$理解为对任何包含$x_\infty$的开集$U$，对应于所有充分大的$n$的那些$x_n$都落在$U$中，那么 Hausdorff 条件就可以保证收敛点列的极限点必须唯一。

练习　　证明度量空间关于度量拓扑都是 Hausdorff 空间。

借助拓扑结构，我们可以有效地谈论空间在某些局部的性质。一般地，对于某个关于拓扑空间X的子集的命题P，我们说命题P在点$x \in X$附近*局部地*成立，如果存在包含x的开集U使得命题P关于U成立。

习题

题 1　　枚举二元集 {1,2} 所有可能的拓扑，并指出哪些互相同胚。进而，思考三元集{1,2,3}的情形。

题 2 考虑平面的两个子集: $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: |y|\le x\}$ 和 $B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x^2+y^2\le 1, y\neq 1\}$。证明它们互相同胚（关于平面点集拓扑的子空间拓扑）。

题 3 关于三维仿射空间的点集拓扑及其子空间拓扑，证明：椭球面和单位球面相互同胚；马鞍面、双叶双曲面和平面相互同胚；单叶双曲面和圆柱面相互同胚。

题 4 证明双曲平面和欧氏平面关于它们各自的度量拓扑相互同胚。但说明它们互不等距同构。

题 5 通过球极投影，把扩充复平面等同为欧氏空间的单位球面，并用后者的点集拓扑定义前者的拓扑。证明：扩充复平面的 Möbius 变换都是同胚。

题 6 考虑扩充复平面的自映射

$$f:\hat{\mathbb{C}}\to\hat{\mathbb{C}}$$

对于$z\in\mathbb{C}$，$f(z)=z^2$，而$f(\infty)=\infty$。用题 5 的拓扑定义证明： f是连续映射但不是同胚。

题 7 通过等同欧氏空间单位球面的对径点，在射影平面定义拓扑如下：它的一个子集是开集，当且仅当这个子集在球面的原像是点集拓扑的开集。证明：射影平面的射影变换都是同胚。

题 8 用题 7 的拓扑定义说明：射影直线和射影圆锥曲线都是射影平面的闭子集。进一步，证明它们（关于诱导的子空间拓扑）相互同胚。

题 9 证明圆锥面（$x^2+y^2-z^2=0$）和任何非退化仿射二次曲面（见题 3）都不同胚。

题 10 证明不存在射影平面的自同胚，而将射影直线变成射影圆锥曲线。

题 11 证明 Hausdorff 空间的单点都是闭集。

题 12 对于拓扑空间之间连续映射，判断以下命题的真假：（1）开集的像是开集。（2）紧集的像是紧集。（3）紧集的原像是紧集。（4）闭集的原像是闭集。

[本稿由原作者刘毅修订于 2018-12-27]