

实射影平面

本篇主要包含有关实射影平面的一些补充习题,也对我们常用的一些记号和术语加以整理,以便与[尤]、[王]比较。

平面实射影几何

习题 1 空间直角坐标系中,记坐标 XY 平面的单位圆为 $\Gamma: x^2 + y^2 = 1, z = 0$ 。找出所有这样的点 A , 使得以 A 为极的中心投影 (根据相应的目标平面) 把 Γ 映成坐标 YZ 平面中的抛物线和坐标 XZ 平面中的双曲线。

习题 2 射影平面上的四条线处于一般位置, 问: 它们把射影平面分成多少个多边形区域? 它们分别有多少条边? 为区域染色, 要求邻接的区域颜色不同, 至少要几种颜色? 如果是五条线, 情形又如何?

习题 3 给定仿射平面 Π , 那么 Π 上的任何仿射圆锥曲线都可以通过添加渐近线向而成为射影平面 $P(\Pi)$ 中的一条射影圆锥曲线。试说明射影圆锥曲线如何定义内部和外部。(即射影平面去掉圆锥曲线剩余的两部分如何区分? 另外, 你能否合理地阐明这里所谓两部分的含义?)

习题 4 给定仿射平面 Π , 那么 Π 的任何仿射变换都能唯一地延拓成射影平面 $P(\Pi)$ 的射影变换。讨论延拓的变换在无穷远线上可能的不动点个数。

习题 5 给定欧氏平面 Π , 是否存在一个射影平面 $P(\Pi)$ 的射影变换, 它保持 Π 中的一个给定圆不变, 但却不保持圆心不动?

线把模型的典范齐次坐标

我们采用实射影平面 $\mathbb{R}P^2$ 的线把模型, 即将其看作三维实向量空间 \mathbb{R}^3 的全体一维子空间的集合。利用 \mathbb{R}^3 的典范基底, $\mathbb{R}P^2$ 的每一个点可赋予一个典范的齐次坐标。具体来讲, 由 \mathbb{R}^3 中的非零向量

$$(x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$$

张成的一维子空间, 作为 $\mathbb{R}P^2$ 中的点, 它用齐次坐标就记作

$$[(x_1, x_2, x_3)^T] \in \mathbb{R}P^2。$$

于是, 任何相差非零实因子 $\lambda \neq 0$ 的两个齐次坐标 $[(x_1, x_2, x_3)^T]$ 和 $[(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3)^T]$ 就被视为表示相同的点。

实射影平面上的 $\mathbb{R}P^2$ 每一条线也有诱导的 (对偶) 齐次坐标。具体来讲, 所有满足齐次实线性方程 (系数不全为零)

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$$

的点 $[(x_1, x_2, x_3)^T]$ 组成的线, 它的齐次坐标就写成

$$[(a_1, a_2, a_3)] \in (\mathbb{RP}^2)^*.$$

其中 $(\mathbb{RP}^2)^*$ 表示 \mathbb{RP}^2 的全体线的集合。注意我们约定点的齐次坐标用列记号，线的齐次坐标用行记号。

习题 6 判断下列四点是否处于一般位置（即没有三点共线）：

$$[(-1, 2, 1)^T], \quad [(-3, 4, -1)^T], \quad [(1, 0, -1)^T], \quad [(5, -4, 2)^T]$$

习题 7 给定线 l_1, l_2, l_3, l_4, l_5 分别为

$$[(1, 2, 3)], \quad [(2, -1, -1)], \quad [(0, 1, 1)], \quad [(-1, 1, 0)], \quad [(1, 5, 3)]$$

记 l_1 与 l_2 的交点为 A ， l_3 与 l_4 的交点为 B 。

- (1) 计算连线 AB 与 l_5 的交点 C 。
- (2) 计算点 A, B, C 的第四调和点 D 。

习题 8 对于齐次参数 $[(s, t)^T] \in \mathbb{RP}^1$ ，验证齐次参数曲线 $[(s^2, st, t^2)^T] \in \mathbb{RP}^2$ 给出一条射影圆锥曲线的参数化。

- (1) 计算点 $[(1, 1, 3)^T]$ 的极线。
- (2) 判断此点是否在曲线内部。

习题 9 每一个三阶可逆实矩阵 $A \in \text{GL}(3, \mathbb{R})$ 给出一个射影变换 $\mathbb{RP}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$ ，在齐次坐标上形如

$$[X] \mapsto [AX]$$

- (1) 求证：可逆数量矩阵构成 $\text{GL}(3, \mathbb{R})$ 的正规子群。把商群记作 $\text{PGL}(3, \mathbb{R})$ 。
- (2) 求证：上述变换诱导了一个 $\text{PGL}(3, \mathbb{R})$ 在 \mathbb{RP}^2 上的群作用。
- (3) 求证： \mathbb{RP}^2 的每一个射影变换都能够并且唯一地由 $\text{PGL}(3, \mathbb{R})$ 中的元素实现。

习题 10 分别求满足以下要求的 \mathbb{RP}^2 的射影变换，用一个矩阵 $S \in \text{GL}(3, \mathbb{R})$ 写出。

(1) 要求把四点

$$A_1 = [(1, 0, 0)^T], \quad A_2 = [(0, 1, 0)^T], \quad A_3 = [(0, 0, 1)^T], \quad A_4 = [(1, 1, 1)^T]$$

相应地变换到

$$B_1 = [(1, 0, 1)^T], \quad B_2 = [(1, 2, 2)^T], \quad B_3 = [(-1, 1, 2)^T], \quad B_4 = [(7, 0, 2)^T]$$

(2) 要求把四点

$$P_1 = [(1, 0, 0)^T], \quad P_2 = [(1, 1, 0)^T], \quad P_3 = [(1, 1, 1)^T], \quad P_4 = [(4, 2, 1)^T]$$

相应地变换到

$$Q_1 = [(1, -1, -1)^T], \quad Q_2 = [(0, 1, -1)^T], \quad Q_3 = [(0, 0, 1)^T], \quad Q_4 = [(1, -2, 1)^T]$$

(提示：参考[尤，第五章第 5.1 小节]，命题 5.7 的证明与例 5.7。)

线把模型上的射影坐标系

给定实射影平面 \mathbb{RP}^2 上的一个处于一般位置的有序四点组，就确定了它上面的一个射影坐标系，从而 \mathbb{RP}^2 上的每点都具有一个关于此射影坐标系的齐次坐标。在线把模型中，对于任何四点组 L_1, L_2, L_3, L_4 给出的射影坐标系，那么任何点 P 的齐次坐标由下述方式无歧义地唯一决定：选取向量 $w_1, w_2, w_3, w_4 \in \mathbb{R}^3$ 使其分别张成一维子空间 L_1, L_2, L_3, L_4 ，并且要求 $w_4 = w_1 + w_2 + w_3$ ，于是，对于任何张成一维子空间 P 的向量 $v \in \mathbb{R}^3$ ， v 关于此射影坐标系

的齐次坐标为 $[(x_1, x_2, x_3)^T]$ ，其中各分量由分解式 $\mathbf{v} = x_1\mathbf{w}_1 + x_2\mathbf{w}_2 + x_3\mathbf{w}_3$ 给出。特别地，典范的齐次坐标就是由四点组 E_1, E_2, E_3, E_4 决定的射影坐标系上的齐次坐标，其中的点依次对应典范基底向量 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ 和 $\mathbf{e}_4 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$ 所张成的一维子空间。

下面的习题里，我们考虑当 L_1, L_2, L_3, L_4 由一般位置的四个向量 $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4 \in \mathbb{R}^3$ 依次张成时的齐次坐标计算。为了看清普遍的情况，我们这里不要求 $\mathbf{u}_4 = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3$ 。

习题 11

- (1) 记号如上，设 $\mathbf{u}_4 = k_1\mathbf{u}_1 + k_2\mathbf{u}_2 + k_3\mathbf{u}_3$ ，其中系数皆非零，用 K 记三阶对角方阵，对角线元素依次 k_1, k_2, k_3 。对于任何非零向量 \mathbf{v} ，如果 X 是三维列向量，使得

$$\mathbf{v} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)KX$$

求证： \mathbf{v} 表示的点 P 在射影坐标系 $[L_1, L_2, L_3, L_4]$ 中具有齐次坐标 $[X]$ 。

- (2) 取新的射影坐标系 $[L'_1, L'_2, L'_3, L'_4]$ ，采用类似相应的记号。设 S 为三阶可逆方阵，使得

$$(\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2, \mathbf{u}'_3)K' = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)KS$$

求证：相同点 P 的新旧齐次坐标间有关系

$$[X] = [SX']$$

习题 12

- (1) 记号沿用上题，设 ϕ 是射影变换，求证：存在一个可逆线性变换 $\Phi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ，使得向量 $\Phi(\mathbf{u}_1), \Phi(\mathbf{u}_2), \Phi(\mathbf{u}_3), \Phi(\mathbf{u}_4)$ 分别表示点 $\phi(L_1), \phi(L_2), \phi(L_3), \phi(L_4)$ 。说明这样的 Φ 在相差一个非零数量变换的意义下是唯一的。

- (2) 取矩阵 $A \in \text{GL}(3, \mathbb{R})$ ，使得

$$(\Phi(\mathbf{u}_1), \Phi(\mathbf{u}_2), \Phi(\mathbf{u}_3))K = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)KA$$

求证：如果点 P 在射影坐标系 $[L_1, L_2, L_3, L_4]$ 中具有齐次坐标 $[X]$ ，那么 $\phi(P)$ 具有齐次坐标 $[AX]$ 。

- (3) 取新的射影坐标系 $[L'_1, L'_2, L'_3, L'_4]$ ，采用类似相应的记号。设 S 为三阶可逆方阵，使得

$$(\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2, \mathbf{u}'_3)K' = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)KS$$

求证：新旧变换矩阵齐次坐标间有关系

$$[A'] = [S^{-1}AS]$$

其中 $[\cdot]$ 表示三阶可逆方阵在可逆数量乘法下的等价类，即它在 $\text{PGL}(3, \mathbb{R})$ 中的像。

局部仿射图卡*

在实射影平面 $\mathbb{R}P^2$ 上任取一条线 l ，补集 $U_l = \mathbb{R}P^2 \setminus l$ 就自然成为一张仿射平面。它上面的直线 $\mathbb{R}P^2$ 中的线与 U_l 的交集，平行性是指两直线在 U_l 中交集为空。于是， U_l 上的向量是指其中有向线段的平移等价类，选定 U_l 的一个基点和一对线性无关的向量就得到 U_l 的仿射标架。通过选定 U_l 的一个仿射标架，我们就能够写出 U_l 上任何一个点的仿射坐标。我们把 $\mathbb{R}P^2$ 上任何这样的仿射区域，连同其上选定的仿射标架，称为一张局部仿射图卡。这种想法允许我们在 $\mathbb{R}P^2$ 的部分区域观察其中图形。与整体的射影坐标系相比，它在局部问题的处理上经常更方便。（更一般的）局部坐标图卡在现代几何学，比如微分流形的理论中，有着广泛的运用。

习题 13 考虑线把模型中由齐次参数 $[(s, t)^T] \in \mathbb{R}P^1$ 定义的齐次参数曲线 $[(s^3, st^2, t^3)^T] \in \mathbb{R}P^2$ 。分别在线 $l_1: [(1, 0, 0)]$, $l_2: [(0, 1, 0)]$, $l_3: [(0, 0, 1)]$ 的补集 U_1, U_2, U_3 中建立适当的仿射标架，写出限制曲线的相应仿射坐标方程，并在直角坐标平面上画出其图形。你认为曲线上的哪一

点看上去比较奇异?

[本稿由原作者刘毅修订于 2018-11-28]