双曲平面的几种模型

作为一种非欧几何，平面双曲几何革命性地放弃了欧氏《原本》的平行公设，代之以新的公设：经过直线外一点至少存在两条直线不与给定的直线相交。在 19 世纪 20—30 年代，这样一种新的几何学由匈牙利的 J. Bolyai、俄国的 N. Lobachevsky、还有 C. F. Gauss 各自独立地发展起来。1868 年，E. Beltrami 通过建立双曲几何的射影圆盘模型，说明了在欧氏几何逻辑无矛盾的假设下，非欧的公理体系也不会导致矛盾。1871 年，F. Klein 引入了今天使用的双曲几何这个名字，并将它与椭圆几何和抛物几何（即欧氏几何）并列。由于它所展示的负曲率空间的重要直观，也由于它在前沿数学中的广泛应用，我们打算用跟实射影平面那部分差不多的篇幅，建立对于双曲平面的初步认知。

为了概念的简便，我们选择直接在度量空间的等距范畴里着手讨论。这就像当初我们引进欧氏几何时一样，而公理体系的进路从一开始就不加考虑了。在“双曲平面的几何现象”一节中，我们列举双曲平面区别于欧氏平面的一些特点。建议读者先行或参照浏览，以获得一些印象。

定义 1 一个度量空间$(\mathbf{H}^2, d_{\mathrm{H}})$被称为一张*双曲平面*，如果它等距同构于本篇以下列出的任意一种模型。

我们将利用扩充复平面的某些部分建立共形圆盘模型（Poincaré 模型）和上半平面模型，然后简单介绍射影 Lorentz 空间模型。这些模型当然也都是互相等距同构的。射影圆盘模型（Beltrami—Cayley—Klein 模型）的内容，本篇则暂不涉及。当使用平面双曲几何这一术语时，我们指的就是双曲平面连同它自身的保距变换群。

共形圆盘模型

定义 2 双曲平面的*共形圆盘模型*是如下度量空间(D, d_D)。集合

$$D = \{z \in \mathbb{C}: |z| < 1\}$$

是复平面上的开单位圆盘。对于任意$z_1, z_2 \in D$，定义它们之间的距离为

$$d_D(z_1, z_2) = -\log(z_1, z_2; \xi_1, \xi_2) = \log\frac{|z_2 - \xi_1||z_1 - \xi_2|}{|z_2 - \xi_2||z_1 - \xi_1|}$$

其中$\xi_1, \xi_2 \in \partial D$是单位圆周上的两点，使得以它们为始末端点、且与单位圆周正交的有向圆弧（可能是直径）依次经过z_1, z_2。

我们需要验证二元函数d_D确实定义了D上的一个度量，即它复合

$$d_D: D \times D \to [0, +\infty)$$

并且满足正定、对称和三角形不等式。进一步，我们想决定共形圆盘的保距变换群，并且讨论各种双曲图形的性质。

在开始之前，我们先来不加证明地描述希望达到的图景：

（1） 测地线看起来正好是所有与单位圆周正交的欧氏圆弧（不含端点，可能是直径）。这

里，以及在一般的度量空间中，测地线（或测地线段、测地射线）是用以取代欧氏集合中的直线（或线段、射线）的概念，它是同欧氏直线（或线段、射线）等距同构的子集。这意味着测地线上任意两点在度量空间中的最短路径都有它们之间的测地线段实现。

（2） 圆看起来也是复平面上的欧氏圆，并且完全位于复平面单位圆周之内，不过双曲几何的圆心偏离所见欧氏圆的圆心，沿复平面径向更加远离复平面原点。这里，我们把到任意定点距离等于定长的点的集合称为（双曲）圆。

（3） 相同半径的圆越远离复平面原点，看起来欧氏直径越小，其位置越接近复平面单位圆周。

（4） 测地线段形成的夹角看起来等于圆弧的欧氏夹角。这里，夹角是一个取值在$[0,\pi]$的几何量，其严格定义需要用到黎曼几何。我们将权且把圆弧的欧氏夹角作为双曲线段夹角的定义，以便谈论双曲三角形的内角、外角等概念。

下面我们来验证距离函数d_D的各项性质。它们大多数比较明显，只有其中的三角形不等式，直接验算显得无谋。我们打算借助对 Möbius 变换来完成其证明。

命题 3 以下陈述为真。

（1） 对于任意$z_1,z_2\in D$，距离函数d_D定义中的交比满足$(z_1,z_2;\xi_1,\xi_2)\leq 1$，而且等号成立当且仅当$z_1=z_2$；于是$d_D$存在且正定。

（2） 对于任意$z_1,z_2\in D$，有$d_D(z_1,z_2)=d_D(z_2,z_1)$。

（3） 如果$z_1,z_2,z_3\in D$且依次落在同一与复单位圆周正交的欧氏圆弧上，那么$d_D(z_1,z_3)=d_D(z_1,z_2)+d_D(z_2,z_3)$。

（4） 函数d_D在保持单位圆周的 Möbius 变换下不变。

证明 为证第一条，选取适当的 Möbius 变换使相关四点的像落在扩充实轴上，左起顺序为ξ_1',z_1',z_2',ξ_2'，且可令$\xi_1'=0,\xi_2'=\infty$。但这样就有$0<z_1'\leq z_2'$。由共圆复交比取扩充实值，且在 Möbius 变换下不变，我们有

$$(z_1,z_2;\xi_1,\xi_2)=(z_1',z_2';0,\infty)=\frac{z_1'}{z_2'}\leq 1$$

等号成立当且仅当$z_1=z_2$。其余皆易见。□

命题 4 对于任意$z\in D$，

$$d_D(0,z)=\log\frac{1+|z|}{1-|z|}$$

证明 这是距离定义式中有向弧是直径，由定义式即见。□

命题 5 对于任意非零的$a\in D$，存在唯一的反演变换σ_a满足$\sigma_a(D)=D,\sigma_a(a)=0$。事实上，

$$\sigma_a(z)=\frac{a}{\bar{a}}\cdot\frac{z-a}{a\bar{z}-1}$$

证明 取反演圆心在$1/\bar{a}$，半径$\sqrt{1-|a|^{-2}}$，则反演圆与单位圆周正交，且把a映作0。这样的反演只能是唯一的。表达式从而写出。□

上面的两个命题说明到任意定点双曲距离为定长的点的几何也是欧氏圆，且定长可以任意大。

练习 6 说明单位圆周内部的欧氏圆都是某个双曲度量的圆。如果欧氏圆心在$b \in D$，欧氏半径为$0 < r < 1 - |b|$。写出相应双曲圆的圆心和半径。

命题 7 对于任意$z_1, z_2, z_3 \in D$，有不等式

$$d_D(z_1, z_3) \le d_D(z_1, z_2) + d_D(z_2, z_3)$$

证明 只需要证明$d_D(z_1, z_3) \ge d_D(z_1, z_2) = r_1$且$d_D(z_1, z_3) \ge d_D(z_2, z_3) = r_3$的情形。记$l$为经过$z_1, z_3$且与单位圆周正交的欧氏圆弧。分别以$z_1, z_3$为圆心、$r_1, r_3$为双曲半径作圆$C_1, C_3$。由于关于$l$所在的欧氏圆的反演保持$d_D$且保持$z_1, z_3$不动，可见$C_1, C_3$与$l$正交。因为$C_1, C_3$内部的闭包有公共点$z_2$，所以$C_1, C_3$（作为欧氏圆）相切或相交。由它们与$l$的正交性，它们内部的闭包覆盖了$l$上以$z_1, z_3$为端点的欧氏圆弧。再根据$d_D$定义式，它限制在$l$上等距同构于欧氏直线，所以$C_1, C_3$的位置关系表明$d_D(z_1, z_3) \le r_1 + r_3$。这就是断言的三角形不等式。□

于是，我们验证了共形圆盘模型(D, d_D)确实是度量空间。并且，保持单位圆周的 Möbius 变换都是双曲度量的保距变换。

练习 8 证明共形圆盘上的全部测地线有且只有与单位圆周正交的欧氏圆弧和单位圆盘的欧氏直径。

命题 9 共形圆盘上给定（双曲）不共线的三点，则任何双曲保距变换由它们的像完全决定。

证明 将设三点是A, B, C，它们的像分别是A', B', C'。由保距性，任何其它点P的像可以通过作图唯一确定：即以A', B', C'为圆心，以$d_D(A, P), d_D(B, P), d_D(C, P)$为双曲半径作圆，并（由$A, B, C$不共线）取其唯一公共交点。□

定义 10 我们把关于共形圆盘的测地线所在的欧氏圆或直线的反演或反射称为双曲平面的*反射*。

练习 11 求证：共形圆盘的保距变换是至多三个双曲平面的反射的复合。由此说明共形圆盘的保距变换群恰好是保持圆盘不变的 Möbius 变换组成的变换群。

练习 12 求证：共形圆盘的保向的双曲保距变换都形如

$$\phi(z) = e^{i\theta} \cdot \frac{z - a}{\bar{a}z - 1}, \qquad (|a| < 1)$$

而反向的双曲保距变换都形如

$$\phi(z) = e^{i\theta} \cdot \frac{\bar{z} - \bar{a}}{a\bar{z} - 1}, \qquad (|a| < 1)$$

练习 13 利用$d_D(0, z)$的公式导出距离公式

$$d_D(z,w) = -\log(z_1, z_2; \xi_1, \xi_2) = \log \frac{|\bar{z}w - 1| + |w - z|}{|\bar{z}w - 1| - |w - z|}$$

上半平面模型

定义 14 双曲平面的*上半平面模型*是如下度量空间$(\mathfrak{H}, d_{\mathfrak{H}})$。集合

$$\mathfrak{H} = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) > 0\}$$

是复平面上的开上半平面。对于任意$z_1, z_2 \in \mathfrak{H}$，定义它们之间的距离为

$$d_{\mathfrak{H}}(z_1, z_2) = -\log \frac{z_1}{z_2}$$

如果$\mathrm{Re}(z_1) = \mathrm{Re}(z_2), \mathrm{Im}(z_1) \geq \mathrm{Im}(z_2)$，或者

$$d_{\mathfrak{H}}(z_1, z_2) = -\log(z_1, z_2; \xi_1, \xi_2) = \log \frac{|z_2 - \xi_1||z_1 - \xi_2|}{|z_1 - \xi_1||z_2 - \xi_2|}$$

如果$\mathrm{Re}(z_1) \neq \mathrm{Re}(z_2)$，其中$\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}$是实轴上的点，且与实轴正交、且从$\xi_1$到$\xi_2$的有向半圆弧在上半平面顺次经过$z_1, z_2$。

我们取一个扩充复平面的保向 Möbius 变换ψ，它先关于中心在i、半径为$\sqrt{2}$的圆反演，再关于实轴反射。于是ψ把共形圆盘保向地变成上半平面。

练习 15 验证

$$\psi(z) = \frac{1 - iz}{z - i}$$

并且它给出共形圆盘到上半平面的等距同构。

练习 16

（1） 验证上半平面模型的保向保距变换都形如

$$\phi(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \qquad (a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc = 1)$$

而反向保距变换都形如

$$\phi(z) = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}, \qquad (a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc = -1)$$

（2） 我们用 $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$表示所有行列式为$1$的二阶实矩阵组成的群，则其中的数量矩阵构成一个正规子群（它同构于二元乘法群$\{\pm 1\}$），而商群记作$\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$。验证$\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$同构于上半平面模型的保向保距变换群。

（3） 我们用 $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$表示所有行列式非$0$的二阶实矩阵组成的群，则其中的数量矩阵构成一个正规子群（它同构于实数乘法群$\mathbb{R}^{\times}$），而商群记作$\mathrm{PGL}(2, \mathbb{R})$。验证$\mathrm{PGL}(2, \mathbb{R})$同构于上半平面模型的保距变换群。

注记 17* 对于一般的域K，也可以引入记号$\mathrm{PGL}(2, K), \mathrm{PSL}(2, K)$（即域$K$上的二阶射影一般线性群和二阶射影特殊线性群）。我们总能把$\mathrm{PSL}(2, K)$自然含入$\mathrm{PGL}(2, K)$使之成为正规子群，但相应的商群平凡当且仅当K的所有元素在K中都有平方根。例如，由此可知$\mathrm{PGL}(2, \mathbb{C}) \cong \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$，但上面的练习表明$\mathrm{PGL}(2, \mathbb{R}) \cong \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \rtimes \{\pm 1\}$。

双曲平面的几何现象

双曲三角学反映了双曲平面上距离与夹角的联系。它的基本公式与球面三角学看上去非常类似。对于双曲平面的（由测地线段围成的）三角形，我们用A,B,C表记它的内角大小，而用a,b,c表记相应对边的双曲长度。

双曲正弦定理

$$\frac{\sinh a}{\sin A}=\frac{\sinh b}{\sin B}=\frac{\sinh c}{\sin C}$$

双曲余弦定理

$$\cosh c=\cosh a\cosh b-\sinh a\sinh b\cos C$$

对偶双曲余弦定理

$$\cos C=-\cos A\cos B+\sin A\sin B\cosh c$$

这些基本公式在[王，第六章第 3 节]中有非常简洁的证明，重要的是灵活运用。（另外的证明参见本篇的最后一节。）

为了进一步展现双曲平面的非欧几何特点，我们再列举一些事实。它们大多数可以通过对前面模型的观察直接加以检验，除了最后关于面积的事实涉及曲面积分：

（1） 连结任意不同的两点有且只有一条测地线段。
（2） 任意测地线段都可以向两端任意延长。
（3） 过给定测地线外任意一点，存在无穷多条测地线不与给定测地线相交。
（4） 任意两条不同的测地线要么相交，要么有唯一的公垂线段，要么距离下确界为零却没有公共点。
（5） 三角形内角和小于π。
（6） 对应内角相等的两个三角形互相全等。
（7） 同一端点发出的两条不同射线指数地散开。这就是说，如果$A(r),B(r)$是端点相同、方向不同的测地射线，其中$r\in[0,+\infty)$表示射线上的点到端点的距离，那么$r\to+\infty$时，$d_{\mathbf{H}}\big(A(r),B(r)\big)\to+\infty$，且依赖于$r$呈指数增长。
（8） 三角形面积等于π减去内角和。特别地，三角形面积都小于π。
（9） 关于双曲距离，半径趋于无穷时，圆的周长和面积都随半径呈指数增长。
（10） 圆的面积总是小于周长。更一般地，对于光滑简单闭曲线围成的区域而言，面积也总是小于周长。

练习 18 验证上述事实的前七条。

射影 Lorentz 空间模型*

本节和下节的讨论涉及到实线性空间上双线性型的知识，供阅读参考。

在讨论球面几何学的时候，我们实际上使用了三维欧氏向量空间中的单位球面作为模型。在三维 Lorentz 向量空间中，我们可以类似地构造双曲平面的模型。与刚才的两个共形模型相比，这个向量代数的模型更容易揭示双曲平面和球面的某些相像之处，比如，它允许我们为双曲三角学和球面三角学的提供相类似的处理。

定义 19 三维的 Lorentz 向量空间是一个带有 Lorentz 内积的实三维向量空间，记作$\mathbb{R}^{1,2}$。具体来说，把$\mathbb{R}^{1,2}$中的向量写成列向量形式$\boldsymbol{x}=(x_0,x_1,x_2)^{\mathrm{T}}$，其分量都是实数，则 Lorentz 内积定义为实对称双线性函数

$$\boldsymbol{x}\odot\boldsymbol{y}=x_0y_0-x_1y_1-x_2y_2$$

为了方便记号，我们引入写法

$$\|\boldsymbol{x}\|^2=\boldsymbol{x}\odot\boldsymbol{x}$$

但不指定记号$\|\boldsymbol{x}\|$的值。

通常把分量x_0称为时间分量，x_1,x_2称为空间分量。满足$\|\boldsymbol{x}\|^2=0$的全体向量形成 Lorentz 向量空间中锥点在原点的一个关于时间轴旋转对称的锥面，称为*光锥*，光锥上的向量称为*类光向量*；满足$\|\boldsymbol{x}\|^2>0$的全体向量称为*类时向量*，它们组成光锥的*内部*，并根据时间分量的符号，分为*正类时向量*和*负类时向量*两种；满足$\|\boldsymbol{x}\|^2<0$的全体向量称为*类空向量*，它们组成光锥的*外部*。

定义 20 双曲平面的射影 Lorentz 模型实如下度量空间(F,d_F)。集合

$$F=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^{1,2}:\ \|\boldsymbol{x}\|^2=1,x_0>0\}$$

实正类时单位向量形成的旋转双叶双曲面的一叶。对于任意$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in F$，定义它们之间的距离为

$$d_F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\operatorname{arccosh}(\boldsymbol{x}\odot\boldsymbol{y})$$

注记 21 注意光锥上的母线构成（线把）射影平面$\mathbf{P}(\mathbb{R}^{1,2})$上的一条射影圆锥曲线。这条曲线的内部所有点恰好一一对应着双曲面叶F的所有点。这就解释了模型的名字。

引理 22 如果$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^{1,2}$是正类时向量，那么有不等式

$$(\boldsymbol{x}\odot\boldsymbol{y})^2\geq\|\boldsymbol{x}\|^2\|\boldsymbol{y}\|^2$$

等号成立当且仅当$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$线性相关。

证明 只需假设它们线性无关而证明严格的比较。考虑$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$张成的二维子空间$V$，则由于$V$与光锥相交，Lorentz 内积限制在$V$是不定型的实对称双线性函数，所以它限制在基底$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$上的矩阵特征值一正一负，且行列式为负。这就是说，

$$\det\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\odot\boldsymbol{x} & \boldsymbol{x}\odot\boldsymbol{y}\\ \boldsymbol{x}\odot\boldsymbol{y} & \boldsymbol{y}\odot\boldsymbol{y}\end{pmatrix}<0$$

于是所断言的不等式成立。□

有各种方法检验射影 Lorentz 模型与前面的共形模型等距同构，但都需要不少笔墨，本篇略去细节。不加证明地，我们指出映射

$$f:F\to D,\quad f(\boldsymbol{x})=\frac{x_1+ix_2}{1+x_0}$$

就给出了射影 Lorentz 模型与共形圆盘模型的等距同构。在射影 Lorentz 模型中，双曲平面的测地线正好是三维 Lorentz 向量空间中与光锥内部相交的那些二维子空间在双曲面叶F上形成的截口。双曲平面的保距变换可以刻画为三维 Lorentz 向量空间的所有保持 Lorentz 内积不变、且保持时间方向不变（即时间分量符号不变）的线性自同构。这样的线性自同构称为正向 Lorentz 变换，它们组成的$\mathrm{GL}(3,\mathbb{R})$的子群通常记作$\mathrm{O}^+(1,2)$。于是，射影 Lorentz 模

型的保向保距变换群由$\mathrm{O}^+(1,2)$中那些行列式为1（而不是-1）的三阶矩阵组成，这个子群通常记作$\mathrm{SO}^+(1,2)$。特别地，我们有$\mathrm{SO}^+(1,2) \cong \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$，$\mathrm{O}^+(1,2) \cong \mathrm{PGL}(2,\mathbb{R})$。我们鼓励读者运用变换群的观点自行验证上面提及的事实。

延伸阅读： [Ratcliffe, J. G., *Foundations of Hyperbolic Manifolds*: Graduate Texts of Mathematics 149, Second Edition, Springer, 2006]，第三章。注意其中 Lorentz 内积的符号约定与本篇稍异。

用 Lorentz 向量代数处理双曲三角学*

在球面三角学中，我们用三维欧氏向量空间的向量代数给出过相应公式的证明。我们打算把那里的证明搬到三维的 Lorentz 向量空间上来。为此，回忆三维 Lorentz 向量空间$\mathbb{R}^{1,2}$由全体列向量$\boldsymbol{x} = (x_0, x_1, x_2)^{\mathrm{T}}$构成，其分量都是实数。类比于向量点乘的 Lorentz 内积定义为实值的实对称双线性函数

$$\boldsymbol{x} \odot \boldsymbol{y} = x_0 y_0 - x_1 y_1 - x_2 y_2$$

在本篇中，我们使用记号

$$\|\boldsymbol{x}\| = \begin{cases} \sqrt{\boldsymbol{x} \odot \boldsymbol{x}}, & \boldsymbol{x} \odot \boldsymbol{x} > 0 \\ i\sqrt{-\boldsymbol{x} \odot \boldsymbol{x}}, & \boldsymbol{x} \odot \boldsymbol{x} < 0 \end{cases}$$

其中i表记复平面的虚数单位。为了类比叉乘，我们定义 Lorentz 叉乘为向量值的实反对称双线性运算

$$\boldsymbol{x} \otimes \boldsymbol{y} = (x_1 y_2 - x_2 y_1, x_0 y_2 - x_2 y_0, -x_0 y_1 + x_1 y_2)^{\mathrm{T}}$$

（注意：尽管记号形似，Lorentz 叉乘与线性代数中的张量积毫不相干。）

命题 23 Lorentz 内积和 Lorentz 叉乘的混合运算有如下公式：

（1） $(\boldsymbol{x} \otimes \boldsymbol{y}) \odot \boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} \odot (\boldsymbol{y} \otimes \boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{y} \otimes \boldsymbol{z}) \odot \boldsymbol{x}$;

（2） $(\boldsymbol{x} \otimes \boldsymbol{y}) \otimes \boldsymbol{z} = (\boldsymbol{x} \odot \boldsymbol{z})\boldsymbol{y} - (\boldsymbol{x} \odot \boldsymbol{y})\boldsymbol{z}$

（3） $(\boldsymbol{x} \otimes \boldsymbol{y}) \odot (\boldsymbol{z} \otimes \boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{x} \odot \boldsymbol{z})(\boldsymbol{y} \odot \boldsymbol{w}) - (\boldsymbol{x} \odot \boldsymbol{w})(\boldsymbol{y} \odot \boldsymbol{z})$

证明 借助线性对合

$$J(x_0, x_1, x_2)^{\mathrm{T}} = (x_0, -x_1, -x_2)^{\mathrm{T}}$$

我们可以立即验证关系式

$$\boldsymbol{x} \odot \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} \cdot J\boldsymbol{y},\ \ \boldsymbol{x} \otimes \boldsymbol{y} = J(\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}) = J\boldsymbol{x} \times J\boldsymbol{y}$$

其中的点乘和叉乘是把参与的向量自然视为三维欧氏空间$\mathbb{R}^3$的向量理解。于是上述公式都从点乘和叉乘的公式导出。例如，$(\boldsymbol{x} \otimes \boldsymbol{y}) \odot \boldsymbol{z}$就等于混合积$[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}]$。□

注记 24 与本篇采用的类时的记号约定不同，有的文献采用类空的记号约定，即改以$\boldsymbol{x} \,\widetilde{\odot}\, \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} \cdot \tilde{J}\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{x} \otimes \boldsymbol{y} = \tilde{J}(x \otimes y) = -\tilde{J}\boldsymbol{x} \times \tilde{J}\boldsymbol{y}$ 作为相应 Lorentz 向量运算的定义，其中$\tilde{J}(x_0, x_1, x_2)^{\mathrm{T}} = (-x_0, x_1, x_2)^{\mathrm{T}}$。在类时记号约定下，类时向量具有实长度，类空向量具有虚长度。类空记号约定则与此相反。

引理 25 如果$S \in \mathrm{SO}(1,2)$，那么

$$S\boldsymbol{x} \odot S\boldsymbol{y} = S(\boldsymbol{x} \odot \boldsymbol{y}), \qquad S\boldsymbol{x} \otimes S\boldsymbol{y} = S(\boldsymbol{x} \otimes \boldsymbol{y})$$

证明 用J表示 Lorentz 内积的矩阵，（它是三阶对角矩阵$\mathrm{diag}(1,-1,-1)$，）则由线性代数

知识，$S\in \mathrm{SO}(1,2)$的意思具体就是

$$S^{\mathrm{T}}JS=J,\qquad \det S=1$$

前一个条件保证了$S\boldsymbol{x}\odot S\boldsymbol{y}=S(\boldsymbol{x}\odot\boldsymbol{y})$。后一个条件给出等式$(S\boldsymbol{x}\otimes S\boldsymbol{y})\odot S\boldsymbol{z}=(\det S)\,(\boldsymbol{x}\otimes\boldsymbol{y})\odot\boldsymbol{z}=(\boldsymbol{x}\otimes\boldsymbol{y})\odot\boldsymbol{z}=\big(\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x}\otimes\boldsymbol{y})\big)\odot\boldsymbol{Sz}$，由$\boldsymbol{z}$的任意性和 Lorentz 内积的非退化就有$S\boldsymbol{x}\otimes S\boldsymbol{y}=S(\boldsymbol{x}\otimes\boldsymbol{y})$。□

注记 26 保持时间方向的条件则等价于$S_{00}>0$，如果那样的话，就进而有$S\in\mathrm{SO}^{+}(1,2)$。

双曲平面的射影 Lorentz 空间模型由双曲面叶

$$F:\|\boldsymbol{x}\|^2=1,x_0>0$$

给出。以下假设$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}\in F$是双曲三角形的顶点。

引理 27 下列等式成立：

(1)

$$\cosh c=\boldsymbol{\alpha}\odot\boldsymbol{\beta},\qquad \sinh c=-i\|\boldsymbol{\alpha}\otimes\boldsymbol{\beta}\|$$

(2)

$$\cos C=-\frac{(\boldsymbol{\gamma}\otimes\boldsymbol{\alpha})\odot(\boldsymbol{\gamma}\otimes\boldsymbol{\beta})}{\|\boldsymbol{\gamma}\otimes\boldsymbol{\alpha}\|\,\|\boldsymbol{\gamma}\otimes\boldsymbol{\beta}\|},\qquad \sin C=i\,\frac{\|(\boldsymbol{\gamma}\otimes\boldsymbol{\alpha})\otimes(\boldsymbol{\gamma}\otimes\boldsymbol{\beta})\|}{\|\boldsymbol{\gamma}\otimes\boldsymbol{\alpha}\|\,\|\boldsymbol{\gamma}\otimes\boldsymbol{\beta}\|}$$

证明 为方便计，不妨假设$(\boldsymbol{\alpha}\otimes\boldsymbol{\beta})\odot\boldsymbol{\gamma}>0$，（即迎着时间轴看，在双曲面叶呈逆时针排列）。这时因为$(\boldsymbol{\alpha}\otimes\boldsymbol{\beta})\odot\boldsymbol{\gamma}<0$的话，我们可以交换$\boldsymbol{\alpha}$和$\boldsymbol{\beta}$的角色而等式两边都完全不变。

我们注意$\cosh c$的等式就是双曲距离的定义，而$\sinh c$的等式来自关系$\|\boldsymbol{\alpha}\otimes\boldsymbol{\beta}\|^2=(\boldsymbol{\alpha}\otimes\boldsymbol{\beta})\odot(\boldsymbol{\alpha}\otimes\boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{\alpha}\odot\boldsymbol{\beta})^2-1$和$\sinh c>0$。

为了验算$\cos C$和$\sin C$，我们首先假设向量$\boldsymbol{\gamma}$沿着时间轴，而向量$\boldsymbol{\alpha}$的最后一个分量为零。这时，根据双曲三角形边长和内角的记号，我们有

$$\boldsymbol{\gamma}=(1,0,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}=(\cosh b\,,\sinh b\,,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}=(\cosh a\,,\sinh a\cos C\,,\sinh a\sin C)^{\mathrm{T}}$$

于是，由 Lorentz 叉乘的坐标定义，

$$\boldsymbol{\gamma}\otimes\boldsymbol{\alpha}=(0,0,\sinh b)^{\mathrm{T}},\qquad \boldsymbol{\gamma}\otimes\boldsymbol{\beta}=(0,\sinh a\sin C\,,-\sinh a\cos C)^{\mathrm{T}}$$

所断言的$\cos C$和$\sin C$的等式都成立。对于一般的情形，我们注意到双曲平面的保向保距变换由$\mathrm{SO}^{+}(1,2)$给出，它保持 Lorentz 等式右边出现的所有 Lorentz 向量运算，因此任意其它位置放置的双曲三角形都可以用保向保距变换搬运到上述设定的位置获得验证。这样就完成了证明。□

利用上面的公式，双曲正弦定理和双曲余弦定理的验证和球面三角学的方式完全一致，即用 Lorentz 向量混合运算的公式计算$\cos C$和$\sin C$等式的右侧，并与$\cosh c$和$\sinh c$的等式结合比较。对偶的双曲余弦定理可以由前面两个定理的计算导出（见[王，第六章第 10 页最后两行]）。另外，我们也可以尝试代换

$$\boldsymbol{\alpha}^*=\boldsymbol{\beta}\otimes\boldsymbol{\gamma},\qquad \boldsymbol{\beta}^*=\boldsymbol{\gamma}\otimes\boldsymbol{\alpha},\qquad \boldsymbol{\gamma}^*=\boldsymbol{\alpha}\otimes\boldsymbol{\beta}$$

取得新的向量恒等式。就目前而言，$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$是单位正类时向量，$\boldsymbol{\alpha}^*,\boldsymbol{\beta}^*,\boldsymbol{\gamma}^*$一般说来就是类空向量。所以，实现这样的途径还涉及到重新对引理诸等式右端类空的情形进行几何翻译，（细节可参见[Ratcliffe, J. G., *Foundations of Hyperbolic Manifolds*: Graduate Texts of Mathematics 149, Second Edition, Springer, 2006]，第三章）。看上去这样做好像舍近而求远，不过在精神上，它恰好是与先前相一贯的。

[本稿由原作者刘毅修订于 2018-12-18]