欧氏几何的度量模型

在这篇笔记里，我们引入一般的度量空间，然后给出欧氏几何的一个严格定义。

定义　一个抽象的*度量空间*包括两个项目(X, d)，其中X是一个集合，其元素称为点，$d: X \times X \to \mathbb{R}$是一个关于任意两点的函数，称为*距离*，要求对于任意$x, y, z \in X$满足如下性质：（1）非负性：$d(x, y) \geq 0$；（2）非退化性：$d(x, y) = 0$当且仅当$x = y$；（3）对称性：$d(x, y) = d(y, x)$；（4）三角形不等式：$d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$。在指明了度量的场合，我们通常隐去其度量而简记度量空间以其集合X。

注记　其实非负性可以由另外三条性质推出。

定义　两个度量空间(X, d)和(X', d')之间的一个*等距同构映射*是一个保持度量的双射$f: X \to X'$，即对于任意$x, y \in X$,有$d(x, y) = d'(f(x), f(y))$。称两个度量空间是等距同构的，如果它们之间存在着这样的一个等距同构映射。

容易看出，等距同构映射的复合或者逆映射也是等距同构映射，所以等距同构是度量空间之间的等价关系。等距同构的度量空间之间也可能有多个等距同构映射。

例　对于自然数n，引入这样的(E^n, d_E)：这里的E^n是集合

$$E^n = \{(x_1, \cdots, x_n): x_i \in \mathbb{R}\},$$

其距离取为

$$d_E\big((x_1, \cdots, x_n), (y_1, \cdots, y_n)\big) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}。$$

可以验证，(E^n, d_E)构成一个度量空间。我们称(E^n, d_E)为*n维欧氏几何的典范模型*。

练习　用度量空间的定义，证明E^2是度量空间。

定义　我们把度量空间(X, d)称为一个*n维欧氏几何空间*，如果它等距同构于典范模型(E^n, d_E)。

注记　在许多正式的几何学专著里，欧氏几何空间也称为*欧氏空间形式*（Euclidean space form），有时也可以简称为*欧氏几何*。“欧氏空间”这个名称可能和线性代数中的内积向量空间混淆，建议谨慎使用。

抽象的平面欧氏几何总可以通过等距同构，用典范模型的典范坐标分量的线性方程定义直线。这与熟知的平面解析几何处理完全一样。通过适当的翻译，可以验证欧几里得《几何原本》的五公理和五公设在典范模型中是真命题，这样就能够把古典的平面几何学在集合论基础之上严格地建立起来。

练习　证明在E^4中由$x_2 = 0$定义的子集自然构成一个三维欧氏几何空间。

例 （常用术语的定义方式）在n维欧氏几何的典范模型中，我们可以把连结两点P、Q的线段定义为子集

$$\overline{PQ}=\{((1-\lambda)x_1+\lambda y_1,\cdots,(1-\lambda)x_n+\lambda y_n)\in E^n:\lambda\in[0,1]\},$$

而把*有向线段*PQ视为具有指定方向的线段，具体地讲，比如可以采用一个有序点对或者线性映射作为它的定义。（我们以后不会使用有向线段的具体定义方式。）我们把n维欧氏几何中的*平移*定义为一个映射：

$$\tau:E^n\to E^n$$

形如$\tau(x_1,\cdots,x_n)=(x_1+c_1,\cdots,x_n+c_n)$，其中$c_1,\cdots,c_n\in\mathbb{R}$是给定常数。将来在定义向量的时候，我们会谈及"有向线段经过平移能否重合"，这样的说法于是就有了确切的含义。

练习 在欧氏平面的典范模型中，请合理定义并证明：过直线外一点有且只有一条直线与已知直线平行。

思考 在抽象的欧氏几何中引入上述概念应该怎么做？需要小心什么？

经过周全的思考，我们最终能够作结论：在度量空间的范畴中，（三维欧氏几何）空间中的点、有向线段、平移等等都是具备确切含义的数学概念，其基本性质也符合我们的几何常识。这就保证了惯用几何语言的合法性，为向量概念的建立奠定了严格基础。

上述通过度量模型处理欧氏几何的方式体现了现代数学的所谓的结构主义思想，即我们把（几何）空间看作是一个承载的集合添加以一种（源于几何经验的）结构。互相同构的空间被认为具有等效的结构，因而是雷同的。如果认为空间的（几何）性质是由其结构而不是集合决定的，我们就可以只考虑一个或几个具体的模型来剖析那些性质。比如在上面的处理中，欧氏几何的结构就是其欧氏度量，我们习惯于谈论的图形的长度、角度等概念都是结构决定的性质。但是，比如原点的位置、坐标系就不是抽象的欧氏几何空间结构的一部分。尽管在典范模型里我们发现了典范的原点和典范的坐标系，它们却不能通过等距同构映射以自然的方式搬到其它空间上去，这是由于可用的等距同构映射通常不是唯一的。

练习 证明E^2中的欧氏圆盘$B_r=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x^2+y^2\le r^2\}$（关于继承度量）对于不同的实数$r>0$互不等距同构。

练习 设法说明在E^2中的带状区域$U=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:0<y<1\}$与欧氏平面不等距同构。

[本稿由原作者刘毅修订于 2018-09-18]