

欧氏与仿射几何补充练习

题 1 求证：平面上偶数个反射的复合只能是恒同、旋转或者平移；奇数个反射的复合只能是反射或者滑反射。

题 2 分别举出在空间保距变换中,最少能写成一个、两个、三个及四个反射复合的例子。

题 3 对于任何仿射圆锥曲线 Γ , 求证: 任意给定 Γ 上两点 P, Q , 都存在保持 Γ (作为点集) 不变的平面仿射变换将点 P 变作点 Q 。这样的平面仿射变换有多少个? 如果考虑平面保距变换, 情形将如何?

题 4 对于空间中的单叶双曲面 S , 求证: 任意给定 S 上两点 P, Q , 都存在保持 S 不变的保向的空间仿射变换, 将点 P 变作点 Q 。如果考虑二次锥面, 情形将如何?

题 5 对于空间中的椭球面 S , 用 $\text{Aff}(S)$ 标记所有保持 S 不变的空间仿射变换。

- (1) 说明 $\text{Aff}(S)$ 关于变换的复合构成群。
- (2) 如果 S 是球心在原点的单位球面, 决定 $\text{Aff}(S)$ 的全部元素 (用坐标语言刻画)。
- (3) 对于任意两个椭球面 S, S' , 求证: 存在群的同构 $\text{Aff}(S) \cong \text{Aff}(S')$ 。

题 6 反向的平面仿射变换是否一定有不动点? 是否一定有不变直线? 保向的空间仿射变换是否一定有不变平面? 说明理由。

题 7 用合适的语言定义并阐明下述直观: 椭球面上两点在空间中连结的线段总是落在椭球面内部。

注记 双叶双曲面、椭圆抛物面也表现出类似的性质, 可以合适地称为凸性。这几种二次曲面在不少方面反映出相似的特点。

题 8 假设 ϕ, ψ 是同一平面上的两个错切变换。

- (1) 如果 ϕ, ψ 交换 (即满足 $\phi\psi = \psi\phi$), 它们是否一定有相同的错切轴?
- (2) 如果 ϕ, ψ 不交换, 是否能找到一个保向的平面仿射变换 τ , 使得满足 $\tau\phi = \psi\tau$?