拓扑学补充练习

拓扑空间，连续映射

题 1　枚举二元集 $\{1,2\}$ 所有可能的拓扑，并指出哪些互相同胚。进而，思考三元集$\{1,2,3\}$的情形。

题 2　考虑平面的两个子集：$A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon |y|\le x\}$ 和 $B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon x^2+y^2\le 1,$ $y\neq 1\}$。证明它们互相同胚（关于平面点集拓扑的子空间拓扑）。

题 3　关于三维仿射空间的点集拓扑及其子空间拓扑，证明：椭球面和单位球面相互同胚；马鞍面和平面相互同胚；单叶双曲面和圆柱面相互同胚；双叶双曲面和两张平行平面同胚。

题 4　证明双曲平面和欧氏平面关于它们各自的度量拓扑相互同胚，并且说明它们互不等距同构。

题 5　通过球极投影，把扩充复平面等同为欧氏空间的单位球面，并用后者的点集拓扑定义前者的拓扑。证明：扩充复平面的 Möbius 变换都是同胚。

题 6　考虑扩充复平面的自映射

$$f\colon \hat{\mathbb{C}}\to\hat{\mathbb{C}}$$

对于$z\in\mathbb{C}$，$f(z)=z^2$，而$f(\infty)=\infty$。用题 5 的拓扑定义证明：f是连续映射但不是同胚。

题 7　通过等同欧氏空间单位球面的对径点，在射影平面定义拓扑如下：它的一个子集是开集，当且仅当这个子集在球面的原像是点集拓扑的开集。证明：射影平面的射影变换都是同胚。

题 8　用题 7 的拓扑定义说明：射影直线和射影圆锥曲线都是射影平面的闭子集。进一步，证明它们（关于诱导的子空间拓扑）相互同胚。

拓扑性质

题 9　证明圆锥面（$x^2+y^2-z^2=0$）和任何非退化仿射二次曲面（见题 3）都不同胚。

题 10　证明不存在射影平面的自同胚，而将射影直线变成射影圆锥曲线。

题 11　证明 Hausdorff 空间的单点都是闭集。

题 12　对于拓扑空间之间连续映射，判断以下命题的真假：（1）开集的像是开集。（2）紧集的像是紧集。（3）紧集的原像是紧集。（4）闭集的原像是闭集。