实射影平面补充习题

平面实射影几何

习题 1 空间直角坐标系中，记坐标 XY 平面的单位圆为$\Gamma: x^2+y^2=1, z=0$。找出所有这样的点A，使得以A为极的中心投影（根据相应的目标平面）把Γ映成坐标 YZ 平面中的抛物线和坐标 XZ 平面中的双曲线。

习题 2 射影平面上的四条线处于一般位置，问：它们把射影平面分成多少个多边形区域？它们分别有多少条边？为区域染色，要求邻接的区域颜色不同，至少要几种颜色？如果是五条线，情形又如何？

习题 3 给定仿射平面Π，那么Π上的任何仿射圆锥曲线都可以通过添加渐近线向而成为射影平面$P(\Pi)$中的一条射影圆锥曲线。试说明射影圆锥曲线如何定义内部和外部。（即射影平面去掉圆锥曲线剩余的两部分如何区分？另外，你能否合理地阐明这里所谓两部分的意义？）

习题 4 给定仿射平面Π，那么Π的任何仿射变换都能唯一地延拓成射影平面$P(\Pi)$的射影变换。讨论延拓的变换在无穷远线上可能的不动点个数。

习题 5 给定欧氏平面Π，是否存在一个射影平面$P(\Pi)$的射影变换，它保持Π中的一个给定圆不变，但却不保持圆心不动？

线把模型的典范齐次坐标

我们采用实射影平面$\mathbb{R}\mathbf{P}^2$的线把模型，即将其看作三维实向量空间$\mathbb{R}^3$的全体一维子空间的集合。利用$\mathbb{R}^3$的典范基底，$\mathbb{R}\mathbf{P}^2$的每一个点可赋予一个典范的齐次坐标。具体来讲，由$\mathbb{R}^3$中的非零向量

$$(x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$$

张成的一维子空间，作为$\mathbb{R}\mathbf{P}^2$中的点，它用齐次坐标就记作

$$[(x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}] \in \mathbb{R}\mathbf{P}^2。$$

于是，任何相差非零实因子$\lambda \neq 0$的两个齐次坐标 $[(x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}]$ 和 $[(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3)^{\mathrm{T}}]$ 就被视为表示相同的点。

实射影平面上的$\mathbb{R}\mathbf{P}^2$每一条线也有诱导的（对偶）齐次坐标。具体来讲，所有满足齐次实线性方程（系数不全为零）

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$$

的点$[(x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}]$组成的线，它的齐次坐标就写成

$$[(a_1, a_2 a_3)] \in (\mathbb{R}\mathbf{P}^2)^*。$$

其中$(\mathbb{R}\mathbf{P}^2)^*$表示 $\mathbb{R}\mathbf{P}^2$的全体线的集合。注意我们约定点的齐次坐标用列记号，线的齐次坐

标用行记号。

习题 6 判断下列四点是否处于一般位置（即没有三点共线）:

$$[(-1,2,1)^{\mathrm{T}}],\qquad [(-3,4,-1)^{\mathrm{T}}],\qquad [(1,0,-1)^{\mathrm{T}}],\qquad [(5,-4,2)^{\mathrm{T}}]$$

习题 7 给定线 l_1,l_2,l_3,l_4,l_5 分别为

$$[(1,2,3)],\qquad [(2,-1,-1)],\qquad [(0,1,1)],\qquad [(-1,1,0)],\qquad [(1,5,3)]$$

记 l_1 与 l_2 的交点为 A， l_3 与 l_4 的交点为 B。

(1) 计算连线 AB 与 l_5 的交点 C。

(2) 计算点 A,B,C 的第四调和点 D。

习题 8 对于齐次参数 $[(s,t)^{\mathrm{T}}]\in\mathbb{R}\mathbf{P}^1$，验证齐次参数曲线 $[(s^2,st,t^2)^{\mathrm{T}}]\in\mathbb{R}\mathbf{P}^2$ 给出一条射影圆锥曲线的参数化。

(1) 计算点$[(1,1,3)^{\mathrm{T}}]$的极线。

(2) 判断此点是否在曲线内部。

习题 9 每一个三阶可逆实矩阵$A\in\mathrm{GL}(3,\mathbb{R})$给出一个射影变换$\mathbb{R}\mathbf{P}^2\to\mathbb{R}\mathbf{P}^2$，在齐次坐标上形如

$$[X]\mapsto[AX]$$

(1) 求证：可逆数量矩阵构成$\mathrm{GL}(3,\mathbb{R})$的正规子群。把商群记作$\mathrm{PGL}(3,\mathbb{R})$。

(2) 求证：上述变换诱导了一个$\mathrm{PGL}(3,\mathbb{R})$在$\mathbb{R}\mathbf{P}^2$上的群作用。

(3) 求证：$\mathbb{R}\mathbf{P}^2$的每一个射影变换都能够并且唯一地由$\mathrm{PGL}(3,\mathbb{R})$中的元素实现。

习题 10 分别求满足以下要求的$\mathbb{R}\mathbf{P}^2$的射影变换，用一个矩阵$S\in\mathrm{GL}(3,\mathbb{R})$写出。

(1) 要求把四点

$$A_1=[(1,0,0)^{\mathrm{T}}],\qquad A_2=[(0,1,0)^{\mathrm{T}}],\qquad A_3=[(0,0,1)^{\mathrm{T}}],\qquad A_4=[(1,1,1)^{\mathrm{T}}]$$

相应地变换到

$$B_1=[(1,0,1)^{\mathrm{T}}],\qquad B_2=[(1,2,2)^{\mathrm{T}}],\qquad B_3=[(-1,1,2)^{\mathrm{T}}],\qquad B_4=[(7,0,2)^{\mathrm{T}}]$$

(2) 要求把四点

$$P_1=[(1,0,0)^{\mathrm{T}}],\qquad P_2=[(1,1,0)^{\mathrm{T}}],\qquad P_3=[(1,1,1)^{\mathrm{T}}],\qquad P_4=[(4,2,1)^{\mathrm{T}}]$$

相应地变换到

$$Q_1=[(1,-1,-1)^{\mathrm{T}}],\qquad Q_2=[(0,1,-1)^{\mathrm{T}}],\qquad Q_3=[(0,0,1)^{\mathrm{T}}],\qquad Q_4=[(1,-2,1)^{\mathrm{T}}]$$

（提示：参考[尤，第五章第 5.1 小节]，命题 5.7 的证明与例 5.7。）

线把模型上的射影坐标系

给定实射影平面$\mathbb{R}\mathbf{P}^2$上的一个处于一般位置的有序四点组，就确定了它上面的一个射影坐标系，从而$\mathbb{R}\mathbf{P}^2$上的每点都具有一个关于此射影坐标系的齐次坐标。在线把模型中，对于任何四点组L_1，L_2，L_3，L_4给出的射影坐标系，那么任何点P的齐次坐标由下述方式无歧义地唯一决定：选取向量$\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2,\boldsymbol{w}_3,\boldsymbol{w}_4\in\mathbb{R}^3$使其分别张成一维子空间$L_1$，$L_2$，$L_3$，$L_4$，并且要求$\boldsymbol{w}_4=\boldsymbol{w}_1+\boldsymbol{w}_2+\boldsymbol{w}_3$，于是，对于任何张成一维子空间$P$的向量$\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^3$，$\boldsymbol{v}$关于此射影坐标系的齐次坐标为$[(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}]$，其中各分量由分解式$\boldsymbol{v}=x_1\boldsymbol{w}_1+x_2\boldsymbol{w}_2+x_3\boldsymbol{w}_3$给出。特别地，典范的齐次坐标就是由四点组$E_1$，$E_2$，$E_3$，$E_4$决定的射影坐标系上的齐次坐标，其中的点依次对应典范基底向量$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$和$\boldsymbol{e}_4=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3$所张成的一维子空间。

下面的习题里，我们考虑当L_1，L_2，L_3，L_4由一般位置的四个向量$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_4 \in \mathbb{R}^3$依次张成时的齐次坐标计算。为了看清普遍的情况，我们这里不要求$\boldsymbol{u}_4 = \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_3$。

习题 11

(1) 记号如上，设$\boldsymbol{u}_4 = k_1\boldsymbol{u}_1 + k_2\boldsymbol{u}_2 + k_3\boldsymbol{u}_3$，其中系数皆非零，用$K$记三阶对角方阵，对角线元素依次$k_1, k_2, k_3$。对于任何非零向量$\boldsymbol{v}$，如果$X$是三维列向量，使得
$$\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3)KX$$
求证：$\boldsymbol{v}$表示的点P在射影坐标系$[L_1, L_2, L_3, L_4]$中具有齐次坐标$[X]$。

(2) 取新的射影坐标系$[L_1', L_2', L_3', L_4']$，采用类似相应的记号。设S为三阶可逆方阵，使得
$$(\boldsymbol{u}_1', \boldsymbol{u}_2', \boldsymbol{u}_3')K' = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3)KS$$
求证：相同点P的新旧齐次坐标间有关系
$$[X] = [SX']$$

习题 12

(1) 记号沿用上题，设ϕ是射影变换，求证：存在一个可逆线性变换$\Phi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$，使得向量$\Phi(\boldsymbol{u}_1), \Phi(\boldsymbol{u}_2), \Phi(\boldsymbol{u}_3), \Phi(\boldsymbol{u}_4)$分别表示点$\phi(L_1), \phi(L_2), \phi(L_3), \phi(L_4)$。说明这样的$\Phi$在相差一个非零数量变换的意义下是唯一的。

(2) 取矩阵$A \in \mathrm{GL}(3, \mathbb{R})$，使得
$$\big(\Phi(\boldsymbol{u}_1), \Phi(\boldsymbol{u}_2), \Phi(\boldsymbol{u}_3)\big)K = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3)KA$$
求证：如果点P在射影坐标系$[L_1, L_2, L_3, L_4]$中具有齐次坐标$[X]$，那么$\phi(P)$具有齐次坐标$[AX]$。

(3) 取新的射影坐标系$[L_1', L_2', L_3', L_4']$，采用类似相应的记号。设S为三阶可逆方阵，使得
$$(\boldsymbol{u}_1', \boldsymbol{u}_2', \boldsymbol{u}_3')K' = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3)KS$$
求证：新旧变换矩阵齐次坐标间有关系
$$[A'] = [S^{-1}AS]$$
其中$[\cdot]$表示三阶可逆方阵在可逆数量乘法下的等价类，即它在$\mathrm{PGL}(3, \mathbb{R})$中的像。

局部仿射图卡*

在实射影平面$\mathbb{R}\mathbf{P}^2$上任取一条线l，补集$U_l = \mathbb{R}\mathbf{P}^2 \setminus l$就自然成为一张仿射平面。它上面的直线$\mathbb{R}\mathbf{P}^2$中的线与$U_l$的交集，平行性是指两直线在$U_l$中交集为空。于是，$U_l$上的向量是指其中有向线段的平移等价类，选定$U_l$的一个基点和一对线性无关的向量就得到$U_l$的仿射标架。通过选定$U_l$的一个仿射标架，我们就能够写出$U_l$上任何一个点的仿射坐标。我们把$\mathbb{R}\mathbf{P}^2$上任何这样的仿射区域，连同其上一个选定的仿射标架，称为一张*局部仿射图卡*。这种想法允许我们在$\mathbb{R}\mathbf{P}^2$的部分区域观察其中图形。与整体的射影坐标系相比，它在局部问题的处理上经常更方便。

习题 13　考虑线把模型中由齐次参数$[(s,t)^{\mathrm{T}}] \in \mathbb{R}\mathbf{P}^1$定义的齐次参数曲线$[(s^3, st^2, t^3)^{\mathrm{T}}] \in \mathbb{R}\mathbf{P}^2$。分别在线$l_1$: $[(1,0,0)]$，l_1: $[(0,1,0)]$，l_3: $[(0,0,1)]$的补集U_1, U_2, U_3中建立适当的仿射标架，写出限制曲线的相应仿射坐标方程，并在直角坐标平面上画出其图形。你认为曲线上的哪一点看上去比较奇异?

[本稿由原作者刘毅修订于 2017-11-22]