双曲三角学*

本篇用双曲平面的射影 Lorentz 空间模型给出双曲三角学基本公式的证明，供阅读参考。这些基本公式在[王，第六章第 3 节]中有非常简洁的证明，所以这里的处理主要是为了展现双曲三角学和球面三角学的联系。

对于双曲平面的（由测地线段围成的）三角形，我们用A,B,C表记它的内角大小，而用a,b,c表记相应对边的双曲长度。双曲三角学的基本公式于是写作

双曲正弦定理

$$\frac{\sinh a}{\sin A}=\frac{\sinh b}{\sin B}=\frac{\sinh c}{\sin C}$$

双曲余弦定理

$$\cosh c=\cosh a\cosh b-\sinh a\sinh b\cos C$$

对偶双曲余弦定理

$$\cos C=-\cos A\cos B+\sin A\sin B\cosh c$$

在球面三角学中，我们用三维欧氏向量空间的向量代数给出过相应公式的证明。我们打算把那里的证明搬到三维的 Lorentz 向量空间上来。为此，回忆三维 Lorentz 向量空间$\mathbb{R}^{1,2}$由全体列向量$\boldsymbol{x}=(x_0,x_1,x_2)^{\mathrm{T}}$构成，其分量都是实数。类比于向量点乘的 Lorentz 内积定义为实值的实对称双线性函数

$$\boldsymbol{x}\odot\boldsymbol{y}=x_0y_0-x_1y_1-x_2y_2$$

在本篇中，我们使用记号

$$\|\boldsymbol{x}\|=\begin{cases}\sqrt{\boldsymbol{x}\odot\boldsymbol{x}}, & \boldsymbol{x}\odot\boldsymbol{x}>0\\ i\sqrt{-\boldsymbol{x}\odot\boldsymbol{x}}, & \boldsymbol{x}\odot\boldsymbol{x}<0\end{cases}$$

其中i表记复平面的虚数单位。为了类比叉乘，我们定义 Lorentz 叉乘为向量值的实反对称双线性运算

$$\boldsymbol{x}\otimes\boldsymbol{y}=(x_1y_2-x_2y_1,x_0y_2-x_2y_0,-x_0y_1+x_1y_2)^{\mathrm{T}}$$

（注意尽管记号形似，Lorentz 叉乘实则与线性代数中的张量积没有丝毫相干。）

命题　Lorentz 内积和 Lorentz 叉乘的混合运算有如下公式：

（1）　$(\boldsymbol{x}\otimes\boldsymbol{y})\odot\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}\odot(\boldsymbol{y}\otimes\boldsymbol{z})=(\boldsymbol{y}\otimes\boldsymbol{z})\odot\boldsymbol{x}$;

（2）　$(\boldsymbol{x}\otimes\boldsymbol{y})\otimes\boldsymbol{z}=(\boldsymbol{x}\odot\boldsymbol{z})\boldsymbol{y}-(\boldsymbol{x}\odot\boldsymbol{y})\boldsymbol{z}$

（3）　$(\boldsymbol{x}\otimes\boldsymbol{y})\odot(\boldsymbol{z}\otimes\boldsymbol{w})=(\boldsymbol{x}\odot\boldsymbol{z})(\boldsymbol{y}\odot\boldsymbol{w})-(\boldsymbol{x}\odot\boldsymbol{w})(\boldsymbol{y}\odot\boldsymbol{z})$

证明　借助线性对合

$$J(x_0,x_1,x_2)^{\mathrm{T}}=(x_0,-x_1,-x_2)^{\mathrm{T}}$$

我们可以立即验证关系式

$$\boldsymbol{x}\odot\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}\cdot J\boldsymbol{y},\ \ \boldsymbol{x}\otimes\boldsymbol{y}=J(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y})=J\boldsymbol{x}\times J\boldsymbol{y}$$

其中的点乘和叉乘是把参与的向量自然视为三维欧氏空间$\mathbb{R}^3$的向量理解。于是上述公式都从点乘和叉乘的公式导出。例如，$(\boldsymbol{x}\otimes\boldsymbol{y})\odot\boldsymbol{z}$就等于混合积$[\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}]$。□

注记　与本篇采用的类时的记号约定不同，有的文献采用类空的记号约定，即改以$\boldsymbol{x} \widetilde{\odot} \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} \cdot \tilde{J}\boldsymbol{y}$，$\boldsymbol{x} \otimes \boldsymbol{y} = \tilde{J}(x \otimes y) = -\tilde{J}\boldsymbol{x} \times \tilde{J}\boldsymbol{y}$ 作为相应 Lorentz 向量运算的定义，其中$\tilde{J}(x_0, x_1, x_2)^{\mathrm{T}} = (-x_0, x_1, x_2)^{\mathrm{T}}$。在类时记号约定下，类时向量具有实长度，类空向量具有虚长度。类空记号约定则与此相反。

引理　如果$S \in \mathrm{SO}(1,2)$，那么

$$S\boldsymbol{x} \odot S\boldsymbol{y} = S(\boldsymbol{x} \odot \boldsymbol{y}), \qquad S\boldsymbol{x} \otimes S\boldsymbol{y} = S(\boldsymbol{x} \otimes \boldsymbol{y})$$

证明　用J表示 Lorentz 内积的矩阵，（它是三阶对角矩阵$\mathrm{diag}(1,-1,-1)$,）则由线性代数知识，$S \in \mathrm{SO}(1,2)$的意思具体就是

$$S^{\mathrm{T}}JS = J, \qquad \det S = 1$$

前一个条件保证了$S\boldsymbol{x} \odot S\boldsymbol{y} = S(\boldsymbol{x} \odot \boldsymbol{y})$。后一个条件给出等式$(S\boldsymbol{x} \otimes S\boldsymbol{y}) \odot S\boldsymbol{z} = (\det S)\,(\boldsymbol{x} \otimes \boldsymbol{y}) \odot \boldsymbol{z} = (\boldsymbol{x} \otimes \boldsymbol{y}) \odot \boldsymbol{z} = \big(\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x} \otimes \boldsymbol{y})\big) \odot \boldsymbol{Sz}$，由$\boldsymbol{z}$的任意性和 Lorentz 内积的非退化就有$S\boldsymbol{x} \otimes S\boldsymbol{y} = S(\boldsymbol{x} \otimes \boldsymbol{y})$。□

注记　保持时间方向的条件则等价于$S_{00} > 0$，如果那样的话，就进而有$S \in \mathrm{SO}^{+}(1,2)$。

双曲平面的射影 Lorentz 空间模型由双曲面叶

$$F: \|\boldsymbol{x}\|^2 = 1, x_0 > 0$$

给出。以下假设$\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma} \in F$是双曲三角形的顶点。

引理　下列等式成立：

(1)

$$\cosh c = \boldsymbol{\alpha} \odot \boldsymbol{\beta}, \qquad \sinh c = -i\|\boldsymbol{\alpha} \otimes \boldsymbol{\beta}\|$$

(2)

$$\cos C = -\frac{(\boldsymbol{\gamma} \otimes \boldsymbol{\alpha}) \odot (\boldsymbol{\gamma} \otimes \boldsymbol{\beta})}{\|\boldsymbol{\gamma} \otimes \boldsymbol{\alpha}\|\,\|\boldsymbol{\gamma} \otimes \boldsymbol{\beta}\|}, \qquad \sin C = i\,\frac{\|(\boldsymbol{\gamma} \otimes \boldsymbol{\alpha}) \otimes (\boldsymbol{\gamma} \otimes \boldsymbol{\beta})\|}{\|\boldsymbol{\gamma} \otimes \boldsymbol{\alpha}\|\,\|\boldsymbol{\gamma} \otimes \boldsymbol{\beta}\|}$$

证明　为方便计，不妨假设$(\boldsymbol{\alpha} \otimes \boldsymbol{\beta}) \odot \boldsymbol{\gamma} > 0$,（即迎着时间轴看，在双曲面叶呈逆时针排列）。这时因为$(\boldsymbol{\alpha} \otimes \boldsymbol{\beta}) \odot \boldsymbol{\gamma} < 0$的话，我们可以交换$\boldsymbol{\alpha}$和$\boldsymbol{\beta}$的角色而等式两边都完全不变。

我们注意$\cosh c$的等式就是双曲距离的定义，而$\sinh c$的等式来自关系$\|\boldsymbol{\alpha} \otimes \boldsymbol{\beta}\|^2 = (\boldsymbol{\alpha} \otimes \boldsymbol{\beta}) \odot (\boldsymbol{\alpha} \otimes \boldsymbol{\beta}) = (\boldsymbol{\alpha} \odot \boldsymbol{\beta})^2 - 1$和$\sinh c > 0$。

为了验算$\cos C$和$\sin C$，我们首先假设向量$\boldsymbol{\gamma}$沿着时间轴，而向量$\boldsymbol{\alpha}$的最后一个分量为零。这时，根据双曲三角形边长和内角的记号，我们有

$$\boldsymbol{\gamma} = (1,0,0)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha} = (\cosh b\,, \sinh b\,, 0)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\beta} = (\cosh a\,, \sinh a \cos C\,, \sinh a \sin C)^{\mathrm{T}}$$

于是，由 Lorentz 叉乘的坐标定义，

$$\boldsymbol{\gamma} \otimes \boldsymbol{\alpha} = (0,0,\sinh b)^{\mathrm{T}}, \qquad \boldsymbol{\gamma} \otimes \boldsymbol{\beta} = (0, \sinh a \sin C\,, -\sinh a \cos C)^{\mathrm{T}}$$

所断言的$\cos C$和$\sin C$的等式都成立。对于一般的情形，我们注意到双曲平面的保向保距变换由$\mathrm{SO}^{+}(1,2)$给出，它保持 Lorentz 等式右边出现的所有 Lorentz 向量运算，因此任意其它位置放置的双曲三角形都可以用保向保距变换搬运到上述设定的位置获得验证。这样就完成了证明。□

利用上面的公式，双曲正弦定理和双曲余弦定理的验证和球面三角学的方式完全一致，

即用 Lorentz 向量混合运算的公式计算$\cos C$和$\sin C$等式的右侧，并与$\cosh c$和$\sinh c$的等式结合比较。对偶的双曲余弦定理可以由前面两个定理的计算导出（见[王，第六章第 10 页最后两行]）。另外，我们也可以尝试代换

$$\boldsymbol{\alpha}^* = \boldsymbol{\beta} \otimes \boldsymbol{\gamma}, \qquad \boldsymbol{\beta}^* = \boldsymbol{\gamma} \otimes \boldsymbol{\alpha}, \qquad \boldsymbol{\gamma}^* = \boldsymbol{\alpha} \otimes \boldsymbol{\beta}$$

取得新的向量恒等式。就目前而言，$\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}$是单位正类时向量，$\boldsymbol{\alpha}^*, \boldsymbol{\beta}^*, \boldsymbol{\gamma}^*$一般说来就是类空向量。所以实现这样的途径还涉及到重新对引理诸等式右端类空的情形进行几何翻译，（细节可参见[Ratcliffe, J. G., *Foundations of Hyperbolic Manifolds*]的第三章）。看起来这样做似乎舍近而求远，不过从精神上讲，它恰好是更加一贯的。

[本稿由原作者刘毅修订于 2017-12-20]