

# 双曲平面的几种模型

作为一种非欧几何，平面双曲几何革命性地放弃了欧氏《原本》的平行公设，代之以新的公设：经过直线外一点至少存在两条直线不与给定的直线相交。在 19 世纪 20—30 年代，这样一种新的几何学由匈牙利的 J. Bolyai、俄国的 N. Lobachevsky、还有 C. F. Gauss 各自独立地发展起来。1868 年，E. Beltrami 通过建立双曲几何的射影圆盘模型，说明了在欧氏几何逻辑无矛盾的假设下，非欧的公理体系也不会导致矛盾。1871 年，F. Klein 引入了今天使用的双曲几何这个名字，并将它与椭圆几何和抛物几何（即欧氏几何）并列。由于它所展示的负曲率空间的重要直观，也由于它在前沿数学中的广泛应用，我们打算用跟实射影平面那部分差不多的篇幅，建立对于双曲平面的初步认知。

为了概念的简便，我们选择直接在度量空间的等距范畴里着手讨论。这就像当初我们引进欧氏几何时一样，而公理体系的进路从一开始就不加考虑了。在本篇最后一节，我们会列举一些双曲平面区别于欧氏平面的特殊现象。建议读者先行浏览，以获得一些印象。

**定义 1** 一个度量空间  $(\mathbf{H}^2, d_H)$  被称为一张双曲平面，如果它等距同构于本篇以下列出的任意一种模型。

我们将利用扩充复平面的某些部分建立共形圆盘模型 (Poincaré 模型) 和上半平面模型，然后简单介绍射影 Lorentz 空间模型。这些模型当然也都是互相等距同构的。射影圆盘模型 (Beltrami—Cayley—Klein 模型) 的内容，本篇则暂不涉及。当使用平面双曲几何这一术语时，我们指的就是双曲平面连同它自身的保距变换群。

## 共形圆盘模型

**定义 2** 双曲平面的共形圆盘模型是如下度量空间  $(D, d_D)$ 。集合

$$D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$$

是复平面上的开单位圆盘。对于任意  $z_1, z_2 \in D$ ，定义它们之间的距离为

$$d_D(z_1, z_2) = -\log(z_1, z_2; \xi_1, \xi_2) = \log \frac{|z_2 - \xi_1||z_1 - \xi_2|}{|z_2 - \xi_2||z_1 - \xi_1|}$$

其中  $\xi_1, \xi_2 \in \partial D$  是单位圆周上的两点，使得以它们为始末端点、且与单位圆周正交的有向圆弧（可能是直径）依次经过  $z_1, z_2$ 。

我们需要验证二元函数  $d_D$  确实定义了  $D$  上的一个度量，即它复合

$$d_D: D \times D \rightarrow [0, +\infty)$$

并且满足正定、对称和三角形不等式。进一步，我们想决定共形圆盘的保距变换群，并且讨论各种双曲图形的性质。

在开始之前，我们先来不加证明地描述希望达到的图景：

- (1) 测地线看起来正好是所有与单位圆周正交的欧氏圆弧（不含端点，可能是直径）。这

里, 以及在一般的度量空间中, 测地线 (或测地线段、测地射线) 是用以取代欧氏集合中的直线 (或线段、射线) 的概念, 它是同欧氏直线 (或线段、射线) 等距同构的子集。这意味着测地线上任意两点在度量空间中的最短路径都有它们之间的测地线段实现。

- (2) 圆看起来也是复平面上的欧氏圆, 并且完全位于复平面单位圆周之内, 不过双曲几何的圆心偏离所见欧氏圆的圆心, 沿复平面径向更加远离复平面原点。这里, 我们把到任意定点距离等于定长的点的集合称为 (双曲) 圆。
- (3) 相同半径的圆越远离复平面原点, 看起来欧氏直径越小, 其位置越接近复平面单位圆周。
- (4) 测地线段形成的夹角看起来等于圆弧的欧氏夹角。这里, 夹角是一个取值在  $[0, \pi]$  的几何量, 其严格定义需要用到黎曼几何。我们将权且把圆弧的欧氏夹角作为双曲线段夹角的定义, 以便谈论双曲三角形的内角、外角等概念。

下面我们来验证距离函数  $d_D$  的各项性质。它们大多数比较明显, 只有其中的三角形不等式, 直接验算显得无谋。我们打算借助对 Möbius 变换来完成其证明。

**命题 3** 以下陈述为真。

- (1) 对于任意  $z_1, z_2 \in D$ , 距离函数  $d_D$  定义中的交比满足  $(z_1, z_2; \xi_1, \xi_2) \leq 1$ , 而且等号成立当且仅当  $z_1 = z_2$ ; 于是  $d_D$  存在且正定。
- (2) 对于任意  $z_1, z_2 \in D$ , 有  $d_D(z_1, z_2) = d_D(z_2, z_1)$ 。
- (3) 如果  $z_1, z_2, z_3 \in D$  且依次落在同一与复单位圆周正交的欧氏圆弧上, 那么  $d_D(z_1, z_3) = d_D(z_1, z_2) + d_D(z_2, z_3)$ 。
- (4) 函数  $d_D$  在保持单位圆周的 Möbius 变换下不变。

**证明** 为证第一条, 选取适当的 Möbius 变换使相关四点的像落在扩充实轴上, 左起顺序为  $\xi'_1, z'_1, z'_2, \xi'_2$ , 且可令  $\xi'_1 = 0, \xi'_2 = \infty$ 。但这样就有  $0 < z'_1 \leq z'_2$ 。由共圆复交比取扩充实值, 且在 Möbius 变换下不变, 我们有

$$(z_1, z_2; \xi_1, \xi_2) = (z'_1, z'_2; 0, \infty) = \frac{z'_1}{z'_2} \leq 1$$

等号成立当且仅当  $z_1 = z_2$ 。其余皆易见。□

**命题 4** 对于任意  $z \in D$ ,

$$d_D(0, z) = \log \frac{1 + |z|}{1 - |z|}$$

**证明** 这是距离定义式中有向弧是直径, 由定义式即见。□

**命题 5** 对于任意非零的  $a \in D$ , 存在唯一的反演变换  $\sigma_a$  满足  $\sigma_a(D) = D, \sigma_a(a) = 0$ 。事实上,

$$\sigma_a(z) = \frac{a}{\bar{a}} \cdot \frac{z - a}{\bar{a}z - 1}$$

**证明** 取反演圆心在  $1/\bar{a}$ , 半径  $\sqrt{1 - |a|^{-2}}$ , 则反演圆与单位圆周正交, 且把  $a$  映作  $0$ 。这样的反演只能是唯一的。表达式从而写出。□

上面的两个命题说明到任意定点双曲距离为定长的点的几何也是欧氏圆,且定长可以任意大。

**练习 6** 说明单位圆周内部的欧氏圆都是某个双曲度量的圆。如果欧氏圆心在  $b \in D$ , 欧氏半径为  $0 < r < 1 - |b|$ 。写出相应双曲圆的圆心和半径。

**命题 7** 对于任意  $z_1, z_2, z_3 \in D$ , 有不等式

$$d_D(z_1, z_3) \leq d_D(z_1, z_2) + d_D(z_2, z_3)$$

**证明** 只需要证明  $d_D(z_1, z_3) \geq d_D(z_1, z_2) = r_1$  且  $d_D(z_1, z_3) \geq d_D(z_2, z_3) = r_3$  的情形。记  $l$  为经过  $z_1, z_3$  且与单位圆周正交的欧氏圆弧。分别以  $z_1, z_3$  为圆心、 $r_1, r_3$  为双曲半径作圆  $C_1, C_3$ 。由于关于  $l$  所在的欧氏圆的反演保持  $d_D$  且保持  $z_1, z_3$  不动, 可见  $C_1, C_3$  与  $l$  正交。因为  $C_1, C_3$  内部的闭包有公共点  $z_2$ , 所以  $C_1, C_3$  (作为欧氏圆) 相切或相交。由它们与  $l$  的正交性, 它们内部的闭包覆盖了  $l$  上以  $z_1, z_3$  为端点的欧氏圆弧。再根据  $d_D$  定义式, 它限制在  $l$  上等距同构于欧氏直线, 所以  $C_1, C_3$  的位置关系表明  $d_D(z_1, z_3) \leq r_1 + r_3$ 。这就是断言的三角形不等式。□

于是, 我们验证了共形圆盘模型  $(D, d_D)$  确实是度量空间。并且, 保持单位圆周的 Möbius 变换都是双曲度量的保距变换。

**练习 8** 证明共形圆盘上的全部测地线有且只有与单位圆周正交的欧氏圆弧和单位圆盘的欧氏直径。

**命题 9** 共形圆盘上给定(双曲)不共线的三点, 则任何双曲保距变换由它们的像完全决定。

**证明** 将设三点是  $A, B, C$ , 它们的像分别是  $A', B', C'$ 。由保距性, 任何其它点  $P$  的像可以通过作图唯一确定: 即以  $A', B', C'$  为圆心, 以  $d_D(A, P), d_D(B, P), d_D(C, P)$  为双曲半径作圆, 并由  $A, B, C$  不共线) 取其唯一公共交点。□

**定义 10** 我们把关于共形圆盘的测地线所在的欧氏圆或直线的反演或反射称为双曲平面的反射。

**练习 11** 求证: 共形圆盘的保距变换是至多三个双曲平面的反射的复合。由此说明共形圆盘的保距变换群恰好是保持圆盘不变的 Möbius 变换组成的变换群。

**练习 12** 求证: 共形圆盘的保向的双曲保距变换都形如

$$\phi(z) = e^{i\theta} \cdot \frac{z - a}{\bar{a}z - 1}, \quad (|a| < 1)$$

而反向的双曲保距变换都形如

$$\phi(z) = e^{i\theta} \cdot \frac{\bar{z} - \bar{a}}{a\bar{z} - 1}, \quad (|a| < 1)$$

**练习 13** 利用  $d_D(0, z)$  的公式导出距离公式

$$d_D(z, w) = -\log(z_1, z_2; \xi_1, \xi_2) = \log \frac{|\bar{z}w - 1| + |w - z|}{|\bar{z}w - 1| - |w - z|}$$

## 上半平面模型

**定义 14** 双曲平面的上半平面模型是如下度量空间 $(\mathfrak{H}, d_{\mathfrak{H}})$ 。集合

$$\mathfrak{H} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$$

是复平面上的开上半平面。对于任意 $z_1, z_2 \in \mathfrak{H}$ ，定义它们之间的距离为

$$d_{\mathfrak{H}}(z_1, z_2) = -\log \frac{z_1}{z_2}$$

如果 $\text{Re}(z_1) = \text{Re}(z_2)$ ,  $\text{Im}(z_1) \geq \text{Im}(z_2)$ ，或者

$$d_{\mathfrak{H}}(z_1, z_2) = -\log(z_1, z_2; \xi_1, \xi_2) = \log \frac{|z_2 - \xi_1||z_1 - \xi_2|}{|z_1 - \xi_1||z_2 - \xi_2|}$$

如果 $\text{Re}(z_1) \neq \text{Re}(z_2)$ ，其中 $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}$ 是实轴上的点，且与实轴正交、且从 $\xi_1$ 到 $\xi_2$ 的有向半圆弧在上半平面顺次经过 $z_1, z_2$ 。

我们取一个扩充复平面的保向 Möbius 变换 $\psi$ ，它先关于中心在 $i$ 、半径为 $\sqrt{2}$ 的圆反演，再关于实轴反射。于是 $\psi$ 把共形圆盘保向地变成上半平面。

**练习 15** 验证

$$\psi(z) = \frac{1 - iz}{z - i}$$

并且它给出共形圆盘到上半平面的等距同构。

**练习 16**

(1) 验证上半平面模型的保向保距变换都形如

$$\phi(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad (a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc = 1)$$

而反向保距变换都形如

$$\phi(z) = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}, \quad (a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc = -1)$$

(2) 我们用 $\text{SL}(2, \mathbb{R})$ 表示所有行列式为1的二阶实矩阵组成的群，则其中的数量矩阵构成一个正规子群（它同构于二元乘法群 $\{\pm 1\}$ ），而商群记作 $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ 。验证 $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ 同构于上半平面模型的保向保距变换群。

(3) 我们用 $\text{GL}(2, \mathbb{R})$ 表示所有行列式非0的二阶实矩阵组成的群，则其中的数量矩阵构成一个正规子群（它同构于实数乘法群 $\mathbb{R}^\times$ ），而商群记作 $\text{PGL}(2, \mathbb{R})$ 。验证 $\text{PGL}(2, \mathbb{R})$ 同构于上半平面模型的保距变换群。

**注记 17\*** 对于一般的域 $K$ ，也可以引入记号 $\text{PGL}(2, K)$ ,  $\text{PSL}(2, K)$ （即域 $K$ 上的二阶射影一般线性群和二阶射影特殊线性群）。我们总能把 $\text{PSL}(2, K)$ 自然含入 $\text{PGL}(2, K)$ 使之成为正规子群，但相应的商群平凡当且仅当 $K$ 的所有元素在 $K$ 中都有平方根。例如，由此可知 $\text{PGL}(2, \mathbb{C}) \cong \text{PSL}(2, \mathbb{C})$ ，但上面的练习表明 $\text{PGL}(2, \mathbb{R}) \cong \text{PSL}(2, \mathbb{R}) \rtimes \{\pm 1\}$ 。

## 射影 Lorentz 空间模型\*

在讨论球面几何学的时候,我们实际上使用了三维欧氏向量空间中的单位球面作为模型。在三维 Lorentz 向量空间中,我们可以类似地构造双曲平面的模型。与刚才的两个共形模型相比,这个向量代数的模型更容易揭示双曲平面和球面的某些相像之处。

**定义 18** 三维的 Lorentz 向量空间是一个带有 Lorentz 内积的实三维向量空间,记作 $\mathbb{R}^{1,2}$ 。具体来说,把 $\mathbb{R}^{1,2}$ 中的向量写成列向量形式 $\mathbf{x} = (x_0, x_1, x_2)^T$ ,其分量都是实数,则 Lorentz 内积定义为实对称双线性函数

$$\mathbf{x} \odot \mathbf{y} = x_0 y_0 - x_1 y_1 - x_2 y_2$$

为了方便记号,我们引入写法

$$\|\mathbf{x}\|^2 = \mathbf{x} \odot \mathbf{x}$$

但不指定记号 $\|\mathbf{x}\|$ 的值。

通常把分量 $x_0$ 称为时间分量, $x_1, x_2$ 称为空间分量。满足 $\|\mathbf{x}\|^2 = 0$ 的全体向量形成 Lorentz 向量空间中锥点在原点的一个关于时间轴旋转对称的锥面,称为光锥,光锥上的向量称为类光向量;满足 $\|\mathbf{x}\|^2 > 0$ 的全体向量称为类时向量,它们组成光锥的内部,并根据时间分量的符号,分为正类时向量和负类时向量两种;满足 $\|\mathbf{x}\|^2 < 0$ 的全体向量称为类空向量,它们组成光锥的外部。

**定义 19** 双曲平面的射影 Lorentz 模型实如下度量空间 $(F, d_F)$ 。集合

$$F = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{1,2} : \|\mathbf{x}\|^2 = 1, x_0 > 0\}$$

实正类时单位向量形成的旋转双叶双曲面的一叶。对于任意 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in F$ ,定义它们之间的距离为

$$d_F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \operatorname{arccosh}(\mathbf{x} \odot \mathbf{y})$$

**注记 20** 注意光锥上的母线构成(线把)射影平面 $\mathbf{P}(\mathbb{R}^{1,2})$ 上的一条射影圆锥曲线。这条曲线的内部所有点恰好一一对应着双曲面叶 $F$ 的所有点。这就解释了模型的名字。

**引理 21** 如果 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{1,2}$ 是正类时向量,那么有不等式

$$(\mathbf{x} \odot \mathbf{y})^2 \geq \|\mathbf{x}\|^2 \|\mathbf{y}\|^2$$

等号成立当且仅当 $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ 线性相关。

**证明** 只需假设它们线性无关而证明严格的比较。考虑 $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ 张成的二维子空间 $V$ ,则由于 $V$ 与光锥相交, Lorentz 内积限制在 $V$ 是不定型的实对称双线性函数,所以它限制在基底 $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ 上的矩阵特征值一正一负,且行列式为负。这就是说,

$$\det \begin{pmatrix} \mathbf{x} \odot \mathbf{x} & \mathbf{x} \odot \mathbf{y} \\ \mathbf{x} \odot \mathbf{y} & \mathbf{y} \odot \mathbf{y} \end{pmatrix} < 0$$

于是所断言的不等式成立。□

有各种方法检验射影 Lorentz 模型与前面的共形模型等距同构,但都需要不少笔墨,本

篇略去细节。不加证明地，我们指出映射

$$f: F \rightarrow D, \quad f(\mathbf{x}) = \frac{x_1 + ix_2}{1 + x_0}$$

就给出了射影 Lorentz 模型与共形圆盘模型的等距同构。在射影 Lorentz 模型中，双曲平面的测地线正好是三维 Lorentz 向量空间中与光锥内部相交的那些二维子空间在双曲面叶  $F$  上形成的截面。双曲平面的保距变换可以刻画为三维 Lorentz 向量空间的所有保持 Lorentz 内积不变、且保持时间方向不变（即时间分量符号不变）的线性自同构。这样的线性自同构称为正向 Lorentz 变换，它们组成的  $GL(3, \mathbb{R})$  的子群通常记作  $O^+(1,2)$ 。于是，射影 Lorentz 模型的保向保距变换群由  $O^+(1,2)$  中那些行列式为 1（而不是 -1）的三阶矩阵组成，这个子群通常记作  $SO^+(1,2)$ 。特别地，我们有  $SO^+(1,2) \cong PSL(2, \mathbb{R})$ ， $O^+(1,2) \cong PGL(2, \mathbb{R})$ 。我们鼓励读者运用变换群的观点自行验证上面提及的事实。

延伸阅读：[Ratcliffe, J. G., *Foundations of Hyperbolic Manifolds*. Graduate Texts of Mathematics 149, Second Edition, Springer, 2006], 第三章。注意其中 Lorentz 内积的符号约定与本篇稍异。

## 双曲平面的几何现象

我们列举一些体现双曲平面的非欧几何特点的事实。它们大多数可以通过对前面模型观察直接加以检验，除了最后关于面积的事实涉及曲面积分：

- (1) 连结任意不同的两点有且只有一条测地线段。
- (2) 任意测地线段都可以向两端任意延长。
- (3) 过给定测地线外任意一点，存在无穷多条测地线不与给定测地线相交。
- (4) 任意两条不同的测地线要么相交，要么有唯一的公垂线段，要么距离下确界为零却没有公共点。
- (5) 三角形内角和小于  $\pi$ 。
- (6) 对应内角相等的两个三角形互相全等。
- (7) 同一端点发出的两条不同射线指数地散开。这就是说，如果  $A(r), B(r)$  是端点相同、方向不同的测地射线，其中  $r \in [0, +\infty)$  表示射线上的点到端点的距离，那么  $r \rightarrow +\infty$  时， $d_{\mathbb{H}}(A(r), B(r)) \rightarrow +\infty$ ，且依赖于  $r$  呈指数增长。
- (8) 三角形面积等于  $\pi$  减去内角和。特别地，三角形面积都小于  $\pi$ 。
- (9) 关于双曲距离，半径趋于无穷时，圆的周长和面积都随半径呈指数增长。
- (10) 圆的面积总是小于周长。更一般地，对于光滑简单闭曲线围成的区域而言，面积也总是小于周长。

**练习 22** 验证上述事实的前七条。

[本稿由原作者刘毅修订于 2017-12-08]