作业五选评

[尤 2.7：6]　设l_1和l_2是两条异面的直线，它们都和平面π不平行，证明：所有与l_1和l_2都相交，并且平行与π的直线构成马鞍面。（说明如何选取适当的仿射标架，使坐标方程具有马鞍面的标准形式。）

思路　注意到马鞍面的一种形式是$S: z = xy$。以y参数，它可以解释为关于坐标x, z的一族直线，空间中表现为任何平行于 XZ 坐标平面的平面$y = k$截S产生直线$z = kx, y = k$。根据这个图形我们先选取仿射坐标使上述形式得以实现，再适当修改仿射标架使方程变成（仿射）标准形式$2z = x^2 - y^2$。

解答　设直线l_1和l_2交平面π分别于点O和A，取π以外的点$B \in l_1$，过B作平行于π的平面交l_2于点P。取点$C, Q \in \pi$满足$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA}$。如果有平面与$\pi$平行，交$l_1$和$l_2$分别于点$B_k$和$P_k$，其中$\overrightarrow{OB_k} = k\,\overrightarrow{OB}$，我们由向量几何得到$\overrightarrow{B_kP_k} = \overrightarrow{OA} + k\,\overrightarrow{OC}$。于是全部题设直线在仿射标架$\left(O; \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\right)$上都由关于仿射坐标$(x, y, z)$方程组$z = kx, y = k$给出，其中参数$k$取遍全体实数。这些直线构成马鞍面$S: z = xy$。

为获得标准形式，改取仿射标架$\left(O; \overrightarrow{OA'}, \overrightarrow{OB'}, \overrightarrow{OC'}\right)$以实现仿射坐标代换

$$x = x' + y', \qquad y = x' - y', \qquad z = 2z'$$

即，选取

$$\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}, \qquad \overrightarrow{OB'} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}, \qquad \overrightarrow{OC'} = 2\overrightarrow{OC}$$

则新仿射坐标(x', y', z')下的曲面方程呈标准形式$S: 2z' = (x')^2 - (y')^2$。