作业十三

题 1 双曲三角形ABC，对边相应记a,b,c。用你认为合理的方式，说明当边长都很小时，双曲正弦定理

$$\frac{\sinh a}{\sin A}=\frac{\sinh b}{\sin B}=\frac{\sinh c}{\sin C}$$

和双曲余弦定理

$$\cosh c=\cosh a\cosh b-\sinh a\sinh b\cos C$$

近似地给出欧氏的正弦定理和余弦定理。

题 2 双曲三角形ABC，对边相应记a,b,c。假设顶角C是直角，求边AB上的高，即顶点C到边AB所在测地线的距离。

题 3 求证：给定的长度值$a,b,c>0$可作为边长构成双曲三角形，当且仅当不等式$a+b>c, b+c>a, c+a>b$都成立；给定的角度值$A,B,C>0$可作为内角构成双曲三角形，当且仅当不等式$A+B+C<\pi$成立。

题 4 一个理想双曲三角形是双曲平面上互不相交的三条测地线的并集，并且在共形圆盘模型上，它们看起来是首尾相接于单位圆盘边界的三段圆弧。说明所有的理想双曲三角形都互相双曲保距等价。

题 5 假设$\phi:\mathbf{H}^2\to\mathbf{H}^2$是双曲平面的保距变换。求证：如果存在常数$C>0$，而且对于任何点$P\in\mathbf{H}^2$，都有$d_H(\phi(P),P)<C$成立，那么$\phi$只能是恒同变换。（思考：对于球面和欧氏平面，相应的结论如何？）

题 6 对于行列式为1的二阶整数矩阵构成的矩阵乘法群$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$（通常称为模群），考虑它在上半平面$\mathfrak{H}$的分式线性变换作用。设$B_\infty=\{z\in\mathfrak{H}:\mathrm{Im}(z)>1\}$是虚部大于 1 的区域。

（1） 求证：对于任意的有理数$r\in\mathbb{Q}$，存在一个$A\in\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$，使得其分式线性变换作用把$B_\infty$变成与实轴相切与点$r$的一个欧氏开圆盘$B_r$；

（2） 求证：所有这些B_r还有B_∞的内部两两不相交。

（3） 每个有理数都可以展开为连分数

$$a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{\ddots+\cfrac{1}{a_n}}}$$

其中a_0是整数，其余a_i是正整数。如果知道了$r\in\mathbb{Q}$的（一个）连分数展开，请找出一连串变换$T(z)=z+1$和$S(z)=-1/z$，或它们的逆，使它们的依次作用将B_∞最终变到B_r。