作业十二

题 1　　求证：在双曲平面的上半平面模型中，保向的保距变换都形如

$$\phi(z)=\frac{az+b}{cz+d},(a,b,c,d\in\mathbb{R},ad-bc=1)$$

而反向的保距变换都形如

$$\phi(z)=\frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d},(a,b,c,d\in\mathbb{R},ad-bc=-1)$$

（提示：可以观察关于测地线的双曲反射的表达式）。

题 2　　双曲三角形是否总有内切圆？是否总有外接圆？

题 3　　当$h\to+\infty$时，问上半平面的点$1+hi$和$-1+hi$之间的双曲距离如何变化？当$h\to 0^+$时又如何变化？

题 4　　写出双曲余弦函数和双曲正弦函数的倍角、半角公式。约定双曲反三角函数的定义域和值域分别为

$$\operatorname{arccosh}: [1,+\infty)\to[0,+\infty)$$
$$\operatorname{arcsinh}: (-\infty,+\infty)\to(-\infty,+\infty)$$

用基本初等函数写出它们的表达式。

题 5　　双曲正多边形是以测地线段为边的凸多边形，且其边长都相等，内角也都相等。当双曲正八边形的内角都为$\pi/4$时，计算其边长的双曲余弦值。（双曲三角学公式参见[王，第六章第 3 节]。）

题 6　　双曲平面$\mathbf{H}^2$上，有序的相异的两点A、B决定的双曲平移

$$\tau_{AB}:\ \mathbf{H}^2\to\mathbf{H}^2$$

是如下定义的保距变换：它保持两点所在的测地线不变，没有不动点，并且把点A变到点B。如果A、B、C是双曲三角形的顶点，求证：复合变换$\tau_{CA}\circ\tau_{BC}\circ\tau_{AB}$以点$A$为唯一的不动点。（提示：对于任意点$P$，考虑测地线段$AP$的运动。）