仿射变换的仿射分类*

这篇笔记主要讨论平面仿射变换的仿射分类问题，供阅读参考。严格地讲，这个分类问题应该表述为：刻画平面仿射变换的所有仿射共轭等价类。这里我们采用一个更熟悉的提法：对于给定任何平面仿射变换，选取合适的仿射标架使其坐标表示呈现若干标准形式之一。而且，所有的标准形式应该是不重复的，即不能通过重选仿射标架，使某个标准形式变为另外一个。本篇的目的在于展示变换分类问题的一些处理技巧，以便展示线性代数和几何思想的结合运用。更高维数的仿射变换分类没有本质困难，但是需要进一步的归纳。

设

$$\tau: E^2 \to E^2$$

是平面仿射变换。在仿射标架$(O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2)$上，它由坐标形式

$$T(X) = AX + C$$

给出，其中

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$$

对于任何新的仿射标架$(O';\boldsymbol{e'}_1,\boldsymbol{e'}_2)$，$\tau$具有新的坐标形式

$$T'(X') = A'X' + C'$$

如果重选标架决定的仿射代换形如

$$X = SX' + R$$

其中

$$S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix}, \qquad R = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$$

（这等价于说$\overrightarrow{OO'} = (\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2)R$，$(\boldsymbol{e'}_1,\boldsymbol{e'}_2) = (\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2)S$。）那么，新旧坐标形式有关系

$$\begin{pmatrix} A' & C' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S & R \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S & R \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

或更具体地，

$$A' = S^{-1}AS, \qquad C' = S^{-1}AR + S^{-1}C - S^{-1}R$$

所以，标准化的目标是适当选取S,R使得A',C'尽可能地简化和确定下来。

因为A'只是A在实线性共轭下的标准形式，我们运用线性代数中的（实数域上的）Jordan标准型理论。根据特征值方程$\lambda^2 - \mathrm{tr}(A)\lambda + \det(A) = 0$解的不同情况，我们就知道可以选取$S$使得$A' = S^{-1}AS$具有如下标准形式之一：

（1） 方程有二重实根$\lambda = a'$：$A' = \begin{pmatrix} a' & 0 \\ 0 & a' \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} a' & 1 \\ 0 & a' \end{pmatrix}$；

（2） 方程有二互异实根$\lambda = a', d'$：$A' = \begin{pmatrix} a' & 0 \\ 0 & d' \end{pmatrix}$；

（3） 方程有一对共轭虚根$\lambda = a' \pm b'\sqrt{-1}$：$A' = \begin{pmatrix} a' & -b' \\ b' & a' \end{pmatrix}$。

于是，以下我们假设坐标形式的线性部分已经标准化如上述，就把相应的A',C'重写作A,C。我们需要进一步修改仿射标架，使A不变而C得到简化。因为手上没有轻便的线性代数

工具，我们借助几何的想法。如果所给的仿射变换τ有不动点，我们可以不改变标架的基向量而把基点修改作（任何一个）不动点，那么修改后A将不变而C将变为零向量。但不动点可以通过求解线性方程$X = AX + C$得到，整理后方程形如$(I - A)X = C$。所以，当A没有特征值1的时候，上述修改总可以实现。如果A有特征值1，我们要标准化的情形就包括

$$T(X) = X + \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}, \qquad T(X) = \begin{pmatrix} a' & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}, \qquad T(X) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$$

作为演示，我们只讨论最后一种情况的处理。它在几何上看是先作一个标准的错切，再作一个沿着向量$h\boldsymbol{e}_1 + k\boldsymbol{e}_2$的平移。由于没有不动点，我们解方程得知$k \neq 0$。根据图形的启发，我们把新的标架$(O'; \boldsymbol{e'}_1, \boldsymbol{e'}_2)$选作

$$O' = O, \qquad \boldsymbol{e'}_1 = k\boldsymbol{e}_1, \qquad \boldsymbol{e}'_2 = h\boldsymbol{e}_1 + k\boldsymbol{e}_2$$

那么$\tau_*(\boldsymbol{e}'_1) = \boldsymbol{e}'_1$，$\tau_*(\boldsymbol{e}'_2) = h\boldsymbol{e}_1 + k(\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2) = \boldsymbol{e}'_1 + \boldsymbol{e}'_2$，$\overrightarrow{O\tau(O)} = \boldsymbol{e}'_2$。这说明

$$T'(X') = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X' + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

另外的两种情形可以类似地处理，(其结果参见结论)。

综上所述，平面仿射变换的经过仿射坐标代换可化作如下形式之一，且它们互不仿射等价（参数都取实数）:

（1） 变换有不动点的情形:

$$T(X) = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} X, \qquad (a \neq 0);$$

$$T(X) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} X, \qquad (ad \neq 0);$$

$$T(X) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} X, \qquad (b \neq 0);$$

（2） 变换没有不动点的情形:

$$T(X) = X + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$T(X) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad (a \neq 0,1);$$

$$T(X) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

注记 在[尤，第四章第三节]中，讨论了平面保距变换在保距坐标变换下的标准形式，除恒同外只能是平移、旋转、反射、滑反射之一; 每种又由进一步按照其数值型的保距特征（平移量、旋转角度、滑动量）加以细分。这实际上就是平面保距变换的保距分类。

[本稿由原作者刘毅修订于 2017-11-01]