部分期中试题参考解答

题 5　　假设l是平面上的直线，Γ为平面上的抛物线且与直线l相切。问：所有使得$\sigma(\Gamma)$仍然与直线l相切的平面保距变换σ是否构成群？说明理由。

解答　　不构成群，理由如下。

记题设的平面保距变换的集合为S。设保距变换σ_1把Γ变成与l相切于顶点的抛物线$\sigma_1(\Gamma)$，而保距变换σ_2把$\sigma_1(\Gamma)$变成与l相切于非顶点的抛物线$\sigma_2\sigma_1(\Gamma)$。又设保距变换ν是关于直线l的反射，于是$\nu\sigma_1(\Gamma)$也与l相切于顶点。现在，抛物线$\sigma_2\sigma_1(\Gamma)$的顶点处切线为$\sigma_2(l)$，平面关于$\sigma_2(l)$的反射$\sigma_2\nu\sigma_2^{-1}$把$\sigma_2\sigma_1(\Gamma)$变成$\sigma_2\nu\sigma_1(\Gamma)$。

来说明$\sigma_2\nu\sigma_1(\Gamma)$与直线$l$相交。事实上，由于$\sigma_2\sigma_1(\Gamma)$与$l$相切于非顶点，其对称轴开口方面的射线与$l$没有交点，但其反向延长线、即$\sigma_2\nu\sigma_1(\Gamma)$的对称轴射线$m$却与$l$相交，记交点为$P$。既然直线$l$经过抛物线$\sigma_2\nu\sigma_1(\Gamma)$的对称轴射线$m$上的非端点$P$，$\sigma_2\nu\sigma_1(\Gamma)$就不可能与$l$相切，而只能与之相交。

由此可见，保距变换$\sigma_2\nu\sigma_1$并不属于S，但是由定义，保距变换σ_1、$\sigma_2\sigma_1$、$\nu\sigma_1$都属于S。我们有$\sigma_2\nu\sigma_1 = (\sigma_2\sigma_1)\sigma_1^{-1}(\nu\sigma_1)$。所以要么$\sigma_1^{-1}$不属于$S$，要么$S$对复合不封闭，总之$S$不构成群。

题 6　　假设Γ为平面上的双曲线。所有满足$\sigma(\Gamma) = \Gamma$的平面仿射变换σ构成Γ的仿射对称群，记作G。问：G是否为有限群？是否为交换群？都说明理由。

解答　　既不是有限群，又不是交换群，理由如下。

适当建立仿射坐标系，可以假设Γ是方程$xy = 1$的零点集合。观察有一族仿射变换$\sigma_\lambda(x,\ y) = (\lambda x,\ \lambda^{-1}y)$都保持$\Gamma$不变，其中$\lambda$可取任意的非零实数。可见$G$不是有限群。另外仿射变换$\tau(x,\ y) = (y,\ x)$也保持$\Gamma$不变。由于$\sigma_\lambda\tau = \tau\sigma_{1/\lambda}$，可见$G$不是交换群。

评注　　选用方程$xy = 1$纯粹是为了书写方便，也可以用$x^2 - y^2 = 1$作待定系数，寻找仿射对称。关键在于察觉正确的方向。教材有习题，说椭圆具有许多非保距的仿射对称，（它们看起来像圆上的旋转对称）。我们温故知新。

题 7　　求证：如果一个空间仿射变换保持一对异面直线的并集不变，那么它一定有不变直线。

证明　　记题设的异面直线为a和b，空间仿射变换σ保持它们的并集不变。如果σ保持它们分别不变，已然得证。于是下面假设$\sigma(a) = b$，$\sigma(b) = a$。

过a作平行于b的平面Π_a，过b作平行于a的平面Π_b。由于仿射变换保持平行性，可见Π_a上任何平行于b的直线经σ变换后过$\sigma(a) = b$，且平行于$\sigma(b) = a$，即落在Π_b上。因此$\sigma(\Pi_a) = \Pi_b$，同样，$\sigma(\Pi_b) = \Pi_a$。记Π_a和Π_b的中位面为Π_0，它是所有端点分别在Π_a和Π_b的线段的中点组成的平面。那么$\sigma(\Pi_0) = \Pi_0$，从而σ在Π_0的限制是Π_0的仿射变换。

取$\boldsymbol{\alpha}$和$\boldsymbol{\beta}$为分别平行于直线a和b的非零向量。关于Π_0的任意定点O，它们张成Π_0的仿射标架。为方便起见，可以要求

$$\boldsymbol{\beta} = \sigma(\boldsymbol{\alpha})。$$

记相应仿射坐标$(x,\ y)$，则限制变换形如

$$\sigma(x,y)=(y+x_0,qx+y_0)。$$
考虑它是否有不动点(x^*,y^*)，即方程组
$$\begin{aligned} x^* &= \ \ y^*+x_0 \\ y^* &= qx^*+y_0 \end{aligned}$$
解的情况。代入消元有
$$(q-1)x^*+(x_0+y_0)=0。$$
如果$q\neq 1$，那么σ在Π_0有唯一的不动点。这时，σ是具有不动点的空间仿射变换。因为在三维空间，它的诱导线性变换有实特征值，所以σ又有特征方向。于是经过不动点且平行于特征方向的直线是σ的不变直线。

如果$q=1$，那么$\sigma(x,y)=(y+x_0,x+y_0)$。这时，$\Pi_0$上的直线
$$x-y-\frac{x_0-y_0}{2}=0$$
显然是不变直线。

综上所述，σ总有不变直线。