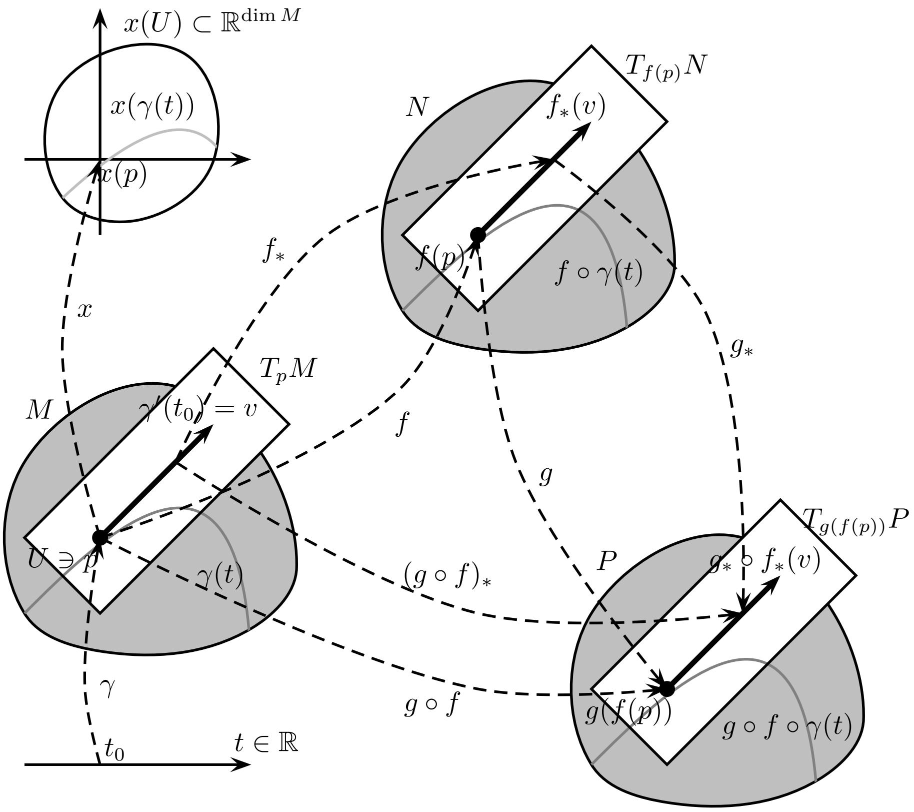
微分流形

授课教师: 包包　　打字人: Li, T.-Y.*

2021 春

What math is necessary to learn manifolds?
Prerequisites: multivariable calculus, linear algebra, point-set topology, and (ideally) ordinary differential equations, group theory, classical differential geometry.



*邮箱: kellty@pku.edu.cn

目录

参考文献

[1] 陈维桓. (2001). *微分流形初步（第二版）*. 高等教育出版社.

[2] 陈省身; 陈维桓. (2001). *微分几何讲义（第二版）*. 北京大学出版社.

[3] W. M. Boothby. (2007). *An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry / 微分流形与黎曼几何引论（影印英文第二版）*. 人民邮电出版社.

[4] B. A. 杜布洛文; S. P. 诺维可夫; A. T. 福明柯. (2006–2007). *现代几何学：方法与应用（共三卷）*. 高等教育出版社.

[5] F. W. Warner. (2004). *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups / 可微流形和李群基础（影印英文版）*. 世界图书出版公司.

1 光滑流形 (2021 年 3 月 10 日)

- 对于映射 $f: X \to Y$, 约定 $[f]: x \in X \mapsto f(x) \in f(X)$.
- 对于单射 $f: X \to Y$, 约定 $f^{-1} = [f]^{-1}: f(X) \to X$.
- 对于 $f: X \to Y$ 和 $g: Y' \to Z$, 约定 $g \circ f: f^{-1}(Y \cap Y') \to Z$.

定义 1.1 (欧氏空间的可微映射). 考虑 $f: U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, 其中 U 是开集. 称 f 是 k 次**连续可微**的, 记为 $f \in C^k(U)$, 若所有偏导数 $\partial_j f^i$ 都存在且 $k-1$ 次连续可微; 其中 $f \in C^0(U)$ 表示 f 连续. 称 $f \in C^\infty(U) = \bigcap_{k=0}^\infty C^k(U)$ 为**光滑**的. 称 f 为**实解析**的, 记为 $f \in C^\omega(U)$, 若 $f \in C^\infty(U)$ 且其 Taylor 展式收敛于 f 本身. 可微映射 f 的 **Jacobi 矩阵**记为 $J_f = (\partial_j f^i)_{1 \leq j \leq m}^{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^{n \times m}$, 当 $m = n$ 时对应的 Jacobi 行列式为 $\det(J_f)$.

注 1.2. 函数 $f(x) = \mathrm{e}^{-1/x} \mathbb{1}_{\{x>0\}}$, $x \in \mathbb{R}$ 是光滑的但不是解析的.

✍ 本课程中, 我们一般只考虑光滑函数. "When in doubt, differentiate."

定理 1.3 (隐函数定理). *(1) 若 $F: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ 在 $p \in \mathbb{R}^m$ 处有 $\partial_i F(p) \neq 0$, 则存在函数 $h: \mathbb{R}^{m-1} \to \mathbb{R}$ 使得在 p 附近成立 $F(x^1, \dots, x^m) = 0$ 当且仅当 $x^i = h(x^1, \dots, x^{i-1}, x^{i+1}, \dots, x^m)$.*

(2) 若 $F: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ 在 $p \in \mathbb{R}^m$ 处有 $J_F(p)$ 前 n 列构成满秩方阵, 则在 p 附近成立 $F(x^1, \dots, x^m) = 0$ 当且仅当 $(x^1, \dots, x^n)$ 可表成某个 $(x^{n+1}, \dots, x^m)$ 的函数.

推论 1.4 (反函数定理). *若 $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 在 $p \in \mathbb{R}^n$ 处有 $\det J_F(p) \neq 0$, 即 $J_F(p)$ 是满秩方阵, 则在 p 附近 F^{-1} 存在. 进一步地, 若 F 光滑, 则 F^{-1} 光滑.*

定义 1.5 (图卡). 拓扑空间 X 中开集 U 到 $\mathbb{R}^n$ 中开集的同胚 $x: U \to x(U)$ 称为**图卡** (局部坐标系). 称图卡的集合为**图册**. 图卡 (U, x) 和 (V, y) 称为 C^k **相容**的, 若坐标变换 $y \circ x^{-1}$ 和 $x \circ y^{-1}$ 都是 C^k 的. 称图册是 C^k 的, 若其中的图卡两两 C^k 相容.

定义 1.6 (流形). 拓扑空间 X 称为**拓扑流形**, 若

(1) 存在覆盖 X 的图册 $\mathcal{A}$;

(2) X 是 Hausdorff 的, 即 X 中任意两点都存在不交开邻域;

(3) X 是第二可数的, 即存在可数拓扑基.

若 $\mathcal{A}$ 是 C^k 图册, 则称拓扑流形 X 是 **C^k(微分) 流形**; 称 C^∞ 流形为**光滑流形**. 极大的 C^k 图册称为 **C^k 微分结构**, 把所有 C^k 相容的图卡加进图册可得. 称 C^k 微分结构中的图卡为 C^k 图卡.

定义 1.7 (光滑映射). 称 $f: X \to Y$ 为**光滑**的, 若对 X 的任意图卡 (U, x) 和 Y 的任意图卡 (V, y), 坐标表示 $y \circ f \circ x^{-1}$ 光滑. 光滑映射 $f: X \to Y$ 在 $p \in U \subset X$ 处的**秩**定义为 $\operatorname{rank}(f)_p = \operatorname{rank}(J_{y \circ f \circ x^{-1}}(p))$.

注 1.8. 光滑映射的秩与图卡的选取无关.

定义 1.9 (光滑同胚). 若光滑映射 $f: X \to Y$ 可逆, 且逆映射 $f^{-1}: Y \to X$ 光滑, 则称 f 是**光滑同胚**.

定义 1.10 (光滑浸入). 光滑映射 $f: X \to Y$ 称为**浸入**, 若 $\operatorname{rank}(f) \equiv \dim X$.

命题 1.11 (浸入的典范表示). *光滑映射 $f: X \to Y$ 是浸入当且仅当任意 $p \in X$ 附近都存在 f 的某个坐标表示为 $\bar{f}(x^1, \dots, x^m) = (x^1, \dots, x^m, 0, \dots, 0)$.*

定义 1.12 (光滑淹没). 光滑映射 $f: X \to Y$ 称为**淹没**, 若 $\operatorname{rank}(f) \equiv \dim Y$.

命题 1.13 (淹没的典范表示). *光滑映射 $f: X \to Y$ 是淹没当且仅当任意 $p \in X$ 附近都存在 f 的某个坐标表示为 $\bar{f}(x^1, \dots, x^m) = (x^1, \dots, x^n)$, 其中 $n \le m$.*

定义 1.14 (光滑嵌入). 若 $f: X \to Y$ 是光滑浸入且是拓扑嵌入, 则称 f 是**光滑嵌入**, 记为 $X \xhookrightarrow[C^\infty]{f} Y$.

注 1.15. 映射 $f: x \in \mathbb{R}^1 \mapsto \mathrm{e}^{-1/|x|}(\operatorname{sgn}(x), 1) \in \mathbb{R}^2$ 是光滑映射且是拓扑嵌入, 但不是浸入.

定义 1.16 (逆紧). 映射 $f: X \to Y$ 称为**逆紧**的, 若 Y 中紧集在 f 下的原像是 X 中的紧集.

注 1.17. 若 X 是紧流形, Y 是流形, 则连续映射 $f: X \to Y$ 逆紧.

命题 1.18. *逆紧的光滑单浸入是光滑嵌入.* (Prop. 4.22.(b) in Lee's Introduction to Smooth Manifolds)

推论 1.19. *定义在紧流形上的光滑单浸入等价于光滑嵌入.*

注 1.20. 设 a 是无理数, 则 $f: x \in \mathbb{R}^1 \mapsto (\mathrm{e}^{\sqrt{-1}x}, \mathrm{e}^{\sqrt{-1}ax}) \in T^2 = S^1 \times S^1$ 是光滑单浸入, 但不是光滑嵌入. 这个映射的像是稠密的, 并且不是局部连通的.

定义 1.21 (子流形). 若 $f: X \to Y$ (默认为含入映射) 是光滑浸入, 则称 $f(X)$ 是 Y 的**浸入子流形**. 进一步地, 若 f 是光滑嵌入, 则称 $f(X)$ 是 Y 的**光滑 (嵌入/正则) 子流形**.

定理 1.22. *设 $F: X \to Y$ 是淹没, 则解空间 $\{x \in X : F(x) = 0\}$ 是 $\dim X - \dim Y$ 维的光滑子流形.*

注 1.23. 球面 $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0\}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的光滑子流形.

习题 1.1. *设 $\Gamma_f = \{(x, y) \in M \times N : y = f(x)\}$ 是连续映射 $f: M \to N$ 的图像. 证明: 若 f 光滑, 则 Γ_f 是 $M \times N$ 的光滑子流形.*

证明. 定义 $\gamma_f : x \in M \mapsto (x, f(x)) \in M \times N$ 和 $\pi_M : (x, y) \in M \times N \mapsto x \in M$, 则 $\pi_M \circ \gamma_f = \mathrm{Id}_M$. 设 f 光滑, 则 $\gamma_f = (\mathrm{Id}_M, f)$ 光滑; 由 $\mathrm{d}\pi_M \circ \mathrm{d}\gamma_f = \mathrm{d}\,\mathrm{Id}_M = \mathrm{Id}_{TM}$ 可知 $\mathrm{d}\gamma_f$ 是单射, 从而 γ_f 是浸入. 易见 $\gamma_f^{-1} = \pi_M|_{\Gamma_f}$ 存在且连续, 于是 γ_f 是光滑嵌入, 从而 $\Gamma_f = \gamma_f(M)$ 是光滑子流形. ■

注. 映射 $f: x \in \mathbb{R} \mapsto x^{1/3} \in \mathbb{R}$ 不光滑, 但是 $\Gamma_f = \{(x, y) : x = y^3\}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 的光滑子流形.

习题 1.2. *实射影空间 $\mathbb{R}P^n$ 由 n 维球面 S^n 粘合每对对径点 $\{p, -p\}$ 得到. 显式写出 $\mathbb{R}P^n$ 的一个光滑图册, 并证明其中的所有图卡确实光滑相容.*

解. 记 p 和 $-p$ 粘合为 $[p]$, 用齐次坐标表示为 $[p] = [x^0 : x^1 : \cdots : x^n]$, 其中 $p = (x^0, x^1, \dots, x^n)$. 易见 $U_i = \{[x^0 : x^1 : \cdots : x^n] \in \mathbb{R}P^n : x^i \neq 0\}$ 是开集, 我们在其上定义

$$\varphi_i : [x^0 : x^1 : \cdots : x^n] \in U_i \mapsto \frac{1}{x^i}(x^0, \dots, x^{i-1}, x^{i+1}, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n,$$

这是同胚, 因为 $\varphi_i^{-1} : (u^1, \dots, u^n) \in \mathbb{R}^n \mapsto [u^1 : \cdots : u^i : 1 : u^{i+1} : \cdots : u^n] \in U_i$. 断言 $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i=0}^n$ 是 $\mathbb{R}P^n$ 的光滑图册. 任取 $i > j$, 有 $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : (u^1, \dots, u^n) \mapsto \frac{1}{u^{j+1}}(u^1, \dots, u^j, u^{j+2}, \dots, u^i, 1, u^{i+1}, \dots, u^n)$ 和 $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : (u^1, \dots, u^n) \mapsto \frac{1}{u^i}(u^1, \dots, u^j, 1, u^{j+1}, \dots, u^{i-1}, u^{i+1}, \dots, u^n)$, 它们都是光滑的. ////

习题 1.3. *把所有 n 行 k 列实矩阵构成的空间 $M_{n\times k}(\mathbb{R})$ 等同于 $\mathbb{R}^{nk}$. 定义一般线性群为 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) : A\text{ 可逆}\}$. 证明 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ 是光滑流形, 并且矩阵求逆运算是光滑自同胚.*

证明. 利用 $\det \in C^\infty(M_{n\times n}(\mathbb{R}))$ 可见 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ 是开集, 从而 $\{(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \mathrm{Id}_{\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})})\}$ 是光滑图册, 即得 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ 是光滑流形. 由于 $\operatorname{adj} : M_{n\times n}(\mathbb{R}) \to M_{n\times n}(\mathbb{R})$ 光滑, 我们有 $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mapsto A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ 光滑, 而 $(A^{-1})^{-1} = A$, 所以求逆运算是光滑自同胚. ■

注. 特殊线性群 $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) : \det(A) = 1\}$ 是 n^2-1 维光滑流形.

正交群 $\mathrm{O}_n = \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) : A^\top A = I_n\}$ 是 $n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ 维光滑流形.

特殊正交群 $\mathrm{SO}_n = \mathrm{O}_n \cap \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ 是 O_n 的连通分支, 也是 $\frac{n(n-1)}{2}$ 维光滑流形.

2 切向量 (2021 年 3 月 17 日)

某些时候将 $\blacklozenge(p)$ 记为 $\blacklozenge|_p$, 如 $\frac{\partial f}{\partial x}|_p$. 某些时候将 p 在图卡 (U,x) 里的坐标 $x(p)$ 记为 $\underline{p}_{(U,x)}$.

定义 2.1 (Einstein 求和约定)**.** 表达式中上下标出现相同符号则自动求和.

注 2.2. 矩阵 $A = (a^i_k)$ 和 $B = (b^k_j)$ 相乘得到 $AB = (a^i_k b^k_j)$.

定义 2.3 (切向量)**.** 四种理解:

1. (几何: 光滑曲线等价类) 开区间到流形的光滑嵌入 γ_1 和 γ_2 称为在点 p 处**一阶密切**, 若存在 t_1 和 t_2, 使得 $\gamma_1(t_1) = \gamma_2(t_2) = p$ 且 $\frac{\mathrm{d}\gamma_1}{\mathrm{d}t}|_{t_1} = \frac{\mathrm{d}\gamma_2}{\mathrm{d}t}|_{t_2}$. 在 p 处的一阶密切等价类称为 p 点的切向量.
2. (代数: 抽象方向导数) 记 $C^\infty_p = \{$定义在 p 附近的光滑函数$\}$. 称 $v : C^\infty_p \to \mathbb{R}$ 为 p 点的**切向量**, 若
   - (线性) $v(sf+tg) = sv(f)+tv(g), \forall s,t \in \mathbb{R}, \forall f,g \in C^\infty_p$
   - (Leibniz) $v(fg) = v(f)g|_p + f|_p v(g), \forall f,g \in C^\infty_p$

   $\Bigg\}$ 此时必有 $v($常值函数$) = 0$
3. 局部坐标表示: 见命题2.5的证明 [2⇒3].
4. (欧氏空间) 由 Whitney 嵌入定理, 可将流形 M 看作 $\mathbb{R}^{2\dim M}$ 的子流形, 其中光滑曲线有切向量.

定义 2.4 (切空间)**.** 将点 $p \in M$ 处的切向量组成的集合记为 T_pM, 称为 p 点的**切空间**.

命题 2.5. *切空间 T_pM 是 $\dim M$ 维线性空间.*

证明. 取图卡 (U,x) 覆盖 p. 对于 $h \in C^\infty_p$, 记 $\underline{h}_{(U,x)} = h \circ x^{-1}$. 考察 $t \mapsto \underline{h}_{(U,x)}(\underline{p}_{(U,x)} + t(\underline{q}_{(U,x)} - \underline{p}_{(U,x)}))$, 我们有 $h(q) = h(p) + (x^i(q) - x^i(p))r_i(q)$, 其中 $r_i(q) = \int_0^1 \partial_i \underline{h}_{(U,x)}(\underline{p}_{(U,x)} + t(\underline{q}_{(U,x)} - \underline{p}_{(U,x)}))\,\mathrm{d}t$. 由此可得 $v(h) = v(x^i)\frac{\partial}{\partial x^i}|_p(h)$, 其中 $\frac{\partial}{\partial x^i}|_p(h) = \frac{\partial h}{\partial x^i}|_p = \partial_i \underline{h}_{(U,x)}(\underline{p}_{(U,x)}) = r_i(p)$. 故 $v = v(x^i)\frac{\partial}{\partial x^i}|_p$. □

定义 2.6 (自然基底)**.** 称 $\{\frac{\partial}{\partial x^i}|_p\}_{i=1}^{\dim M}$ 为 T_pM 在图卡 (U,x) 里的**自然基底**.

注 2.7. 将 $(x,y,z) \in S^2$ 表示为 $x = \sin\varphi\cos\theta$, $y = \sin\varphi\sin\theta$, $z = \cos\varphi$. 利用 $\gamma(t) = (\sin\varphi\cos t, \sin\varphi\sin t, \cos\varphi)$ 可得 $\frac{\partial}{\partial\theta} = \frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}|_{t=\theta} = (-\sin\varphi\sin\theta, \sin\varphi\cos\theta, 0)$. 类似地, $\frac{\partial}{\partial\varphi} = (\cos\varphi\cos\theta, \cos\varphi\sin\theta, -\sin\varphi)$.

定义 2.8 (切丛)**.** 称 $TM = \{(p,v) : p \in M, v \in T_pM\}$ 为流形 M 的**切丛**.

命题 2.9. *设 M 是微分流形, 则 TM 是微分流形.*

证明. 可以用 M 的每个图卡 (U,x) 诱导 TM 的图卡 $(\tilde U, \tilde x)$, 其中 $\tilde U = \{(p,v) : p \in U, v \in T_pM\}$, $\tilde x(p, a^i\frac{\partial}{\partial x^i}|_p) = (x(p), a)$. □

定义 2.10 (切向量场)**.** 任给 $A \subset M$, 连续映射 $\xi : p \in A \mapsto (p, \xi|_p) \in TM$ 称为 A 上的**切向量场**. 若 A 是光滑子流形, ξ 光滑, 则称 ξ 为**光滑切向量场**. 将 M 上的光滑切向量场的集合记为 $\Gamma(TM)$.

命题 2.11. *设 (U,x) 是光滑图卡, 记 $\xi|_p = \xi^i(p)\frac{\partial}{\partial x^i}|_p$, 则 ξ 光滑当且仅当每个 ξ^i 都光滑.*

注 2.12. 切向量场 ξ 可看作对 ξ 的方向导数 $\partial_\xi : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$, 满足 $\partial_\xi(h)|_p = \xi|_p(h)$, $p \in M$.

命题 2.13. 映射 $D : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ 是某个 ∂_ξ 当且仅当 D 满足:
线性, *Leibniz*, 局部 (若 $U \subset M$ 开, 则 $f|_U = g|_U$ 蕴涵 $(Df)|_U = (Dg)|_U$).

习题 2.1. 考虑所有实对称矩阵构成的光滑流形 $M = \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) : A^\top = A\}$.
(a) 写出一个覆盖单位矩阵 I_n 的光滑图卡, 以及对应的自然基底.
(b) 考察光滑函数 det (求行列式), 求它对自然基底中各个切向量的方向导数.

解. (a) 令 $\varphi : (a^{i,j})^{1\le i\le n}_{1\le j\le n} \mapsto (\underline{a}^{i,j})_{1\le i\le j\le n} = (a^{i,j})_{1\le i\le j\le n}$ 并且将 $\varphi(M)$ 等同于 $\mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$, 则 (M,φ) 是光滑图卡. 对应的自然基底为 $\{\frac{\partial}{\partial \underline{a}^{i,j}}\}_{1\le i\le j\le n}$, 其中 $\frac{\partial}{\partial \underline{a}^{i,j}} = \frac{\partial a^{k,l}}{\partial \underline{a}^{i,j}} \frac{\partial}{\partial a^{k,l}} = \frac{1}{1+\delta^{i,j}}(\frac{\partial}{\partial a^{i,j}} + \frac{\partial}{\partial a^{j,i}})$.
(b) 由于 $\frac{\partial \det}{\partial a^{i,j}}(A) = \mathrm{adj}(A)_{i,j}$, $\forall i,j$, 我们有 $\frac{\partial \det}{\partial \underline{a}^{i,j}}(A) = \frac{2}{1+\delta^{i,j}} \mathrm{adj}(A)_{i,j}$, $\forall i \le j$. ////

习题 2.2. 设 $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 是光滑淹没, 则 $M = \{p \in \mathbb{R}^n : F(p) = 0\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的光滑子流形. 证明 $v \in \mathbb{R}^n$ 可以看作 T_pM 里的切向量当且仅当 $v^i\partial_i F(p) = 0$.

证明. 设 γ 是开区间到 M 的光滑嵌入, 且 $\gamma(t_0) = p$, 则 $0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|_{t_0}(F\circ\gamma) = \partial_i|_p(F)\frac{\mathrm{d}\gamma^i}{\mathrm{d}t}|_{t_0}$. 反之, 若 $v \in \mathbb{R}^n$ 适合 $v^i\partial_i F(p) = 0$, 则存在一条满足 $\gamma(t_0) = p$ 和 $\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}|_{t_0} = v$ 的映射进 M 的光滑曲线 γ, 它是微分方程 $\partial_i F(\gamma(t))\frac{\mathrm{d}\gamma^i}{\mathrm{d}t} = 0$ 的解. (既然 $\partial_i F(p)$ 不全为零, 不妨设 $\partial_n F(p) \ne 0$. 由隐函数定理可知, 存在 p 的邻域 $U \subset \mathbb{R}^n$ 以及 $h : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ 使得 $U \cap M = \{q \in \mathbb{R}^n : q^n = h(q^1,\dots,q^{n-1})\}$ 且其上成立 $\partial_i h = -\frac{\partial_i F}{\partial_n F}$ $(\forall i < n)$, 于是 $\gamma(t_0+\varepsilon) = (\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^{n-1}}, h)(p^1+v^1\varepsilon,\dots,p^{n-1}+v^{n-1}\varepsilon)$ 即为所求.) ■

习题 2.3. 设 (U,x) 和 (V,y) 是光滑流形 M 上的光滑图卡, 验证对应的 TM 上的图卡 $(\tilde U,\tilde x)$ 和 $(\tilde V,\tilde y)$ 光滑相容.

证明. 直接计算, 有 $\tilde x^{-1}(x(p),a) = (p, a^j\frac{\partial}{\partial x^j}|_p) = (p, a^j\frac{\partial y^i}{\partial x^j}|_p\frac{\partial}{\partial y^i}|_p)$, 其中 $\frac{\partial y^i}{\partial x^j}|_p = \partial_j(y^i\circ x^{-1})|_{x(p)}$, 进而 $\tilde y\circ\tilde x^{-1}(q,a) = (y\circ x^{-1}(q), J_{y\circ x^{-1}}(q)a)$. 由 $y\circ x^{-1}$ 和 $J_{y\circ x^{-1}}$ 光滑, 可得 $\tilde y\circ\tilde x^{-1}$ 光滑; $\tilde x\circ\tilde y^{-1}$ 同理. ■

3 张量 (2021 年 3 月 19 日)

定义 3.1 (Poisson 括号/Lie 括号). 对于切向量场 ξ 和 η, 通过 $\partial_\rho(h) = \partial_\xi(\partial_\eta(h)) - \partial_\eta(\partial_\xi(h))$ 定义 ρ, 称为 ξ 和 η 的 **Poisson 括号/Lie 括号**, 记为 $\rho = [\xi,\eta]$, 不难验证它仍是切向量场.

注 3.2. 在图卡 (U,x) 里, 记 $\xi = \xi^i\frac{\partial}{\partial x^i}$ 和 $\eta = \eta^i\frac{\partial}{\partial x^i}$, 则

$$\begin{cases} \partial_\xi(\partial_\eta(h)) = \xi^i\frac{\partial}{\partial x^i}(\eta^j\frac{\partial h}{\partial x^j}) = \xi^i\frac{\partial\eta^j}{\partial x^i}\frac{\partial h}{\partial x^j} + \xi^i\eta^j\frac{\partial^2 h}{\partial x^i\partial x^j} \\ \partial_\eta(\partial_\xi(h)) = \eta^j\frac{\partial}{\partial x^j}(\xi^i\frac{\partial h}{\partial x^i}) = \eta^j\frac{\partial\xi^i}{\partial x^j}\frac{\partial h}{\partial x^i} + \eta^j\xi^i\frac{\partial^2 h}{\partial x^j\partial x^i} \end{cases} \implies \partial_{[\xi,\eta]} = \partial_\xi\partial_\eta - \partial_\eta\partial_\xi = \left(\xi^j\frac{\partial\eta^i}{\partial x^j} - \eta^j\frac{\partial\xi^i}{\partial x^j}\right)\frac{\partial}{\partial x^i}$$

引理 3.3. 任给局部定义的线性无关的光滑切向量场 $\xi_1,\dots,\xi_k$, 存在图卡 (U,x) 使 $\xi_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$ $(\forall i)$, 当且仅当 $[\xi_i,\xi_j] = 0$ $(\forall i,j)$.

定义 3.4 (可积). 称光滑流形 M 上的一族切向量场 $(\xi_1,\dots,\xi_k)$ **完全可积**, 若存在 k 维浸入子流形 N 使得在 $\forall p \in N$ 处有 $T_pN = \mathrm{span}(\xi_1|_p,\dots,\xi_k|_p) \subset T_pM$, 此时 N 称为**完全积分子流形**.

定理 3.5 (Frobenius). 任给局部定义的线性无关的光滑切向量场 $\xi_1,\dots,\xi_k$, 则 $(\xi_1,\dots,\xi_k)$ 完全可积当且仅当 $(\xi_1,\dots,\xi_k)$ **对合**, 即存在光滑函数 C^ℓ_{ij} 使得在 $\forall p$ 处有 $[\xi_i,\xi_j]|_p = C^\ell_{ij}(p)\xi_\ell|_p$ $(\forall i,j)$.

证明. 必要性较为容易: 利用含入映射 $\iota : N \hookrightarrow M$ 的典范表示 $y\circ\iota\circ x^{-1} : (x^1,\dots,x^k) \mapsto (x^1,\dots,x^k,0,\dots,0)$, 在 $\mathrm{span}(\xi_1,\dots,\xi_k) = \mathrm{span}(\frac{\partial}{\partial y^1},\dots,\frac{\partial}{\partial y^k})$ 中计算. 充分性参看梅加强《流形与几何初步》定理 2.2.3. □

定义 3.6 (余切向量). 称切空间 T_pM 上的线性函数为点 p 处的**余切向量**.

注 3.7. 对于切向量 v 和余切向量 ω, 有时记 $\langle\omega, v\rangle = \omega(v)$.

定义 3.8 (全微分). 设 f 是光滑函数, 称余切向量 $\mathrm{d}f|_p : v \in T_pM \mapsto v(f) \in \mathbb{R}$ 为 f 在 p 处的**全微分**.

定义 3.9 (余切空间). 称 $p \in M$ 处的余切向量组成的集合为**余切空间**, 记为 T_p^*M.

定义 3.10 (自然基底). 设 $\{\frac{\partial}{\partial x^i}|_p\}$ 是 T_pM 在图卡 (U, x) 里的自然基底, 则其对偶基 $\{\mathrm{d}x^i|_p\}$ 称为 T_p^*M 在图卡 (U, x) 里的**自然基底**, 满足 $\langle \mathrm{d}x^i|_p, \frac{\partial}{\partial x^j}|_p\rangle = \frac{\partial}{\partial x^j}|_p(x^i) = \frac{\partial x^i}{\partial x^j}|_p = \delta^i_j$.

注 3.11. 任取余切向量 ω, 有 $\omega = \omega_i(p)\mathrm{d}x^i|_p$, 其中 $\omega_i(p) = \langle\omega, \frac{\partial}{\partial x^i}|_p\rangle$. 特别地, $\mathrm{d}f|_p = \frac{\partial f}{\partial x^i}|_p \mathrm{d}x^i|_p$.

定义 3.12 (切映射和拉回). 设 $f : M \to N$ 光滑. 按 $f_*(v)(h) = v(h\circ f)$ 定义 $\mathrm{d}f = f_* : T_pM \to T_{f(p)}N$, 称为 f 诱导的**切映射**. 按 $\langle f^*(\omega), v\rangle = \langle\omega, f_*(v)\rangle$ 定义 $f^* : T^*_{f(p)}N \to T_p^*M$, 称为 f 诱导的**拉回映射**.

注 3.13. 显然 f_* 和 f^* 均为线性映射. 考虑与 $g : N \to P$ 复合, 可得 $(g\circ f)_* = g_*\circ f_*$ 和 $(g\circ f)^* = f^*\circ g^*$.

注 3.14. 在 M 图卡 (U, x) 和 N 图卡 (V, y) 中, $f_*(\frac{\partial}{\partial x^j}|_p) = \frac{\partial y^i\circ f}{\partial x^j}|_p \frac{\partial}{\partial y^i}|_{f(p)}$ 且 $f^*(\mathrm{d}y^i|_{f(p)}) = \frac{\partial y^i\circ f}{\partial x^j}|_p \mathrm{d}x^j|_p$.

注 3.15. 设 $\gamma : \mathbb{R} \to M$ 是光滑曲线, 则 $\frac{\partial}{\partial\gamma}|_{t_0} = \gamma'(t_0) = \gamma_*(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|_{t_0})$ 是 $p = \gamma(t_0)$ 处沿 γ 的方向导数. 进而考察 $f\circ\gamma : \mathbb{R} \to N$, 则 $f_*(\frac{\partial}{\partial\gamma}|_{t_0}) = (f\circ\gamma)_*(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|_{t_0}) = \frac{\partial}{\partial(f\circ\gamma)}|_{t_0}$ 是 $f(p)$ 处沿 $f\circ\gamma$ 的方向导数.

注 3.16. 设 $h : V \subset N \to \mathbb{R}$ 光滑, 我们有 $f^* : \mathrm{d}h = \frac{\partial h}{\partial y^i}\mathrm{d}y^i \mapsto \frac{\partial h}{\partial y^i}\frac{\partial y^i\circ f}{\partial x^j}\mathrm{d}x^j = \frac{\partial h\circ f}{\partial x^j}\mathrm{d}x^j = \mathrm{d}(h\circ f)$.

定义 3.17 (余切丛). 称 $T^*M = \{(p, \omega) : p \in M, \omega \in T_p^*M\}$ 为流形 M 的**余切丛**.

定义 3.18 (余切向量场). 光滑映射 $\omega : p \in A \subset M \mapsto (p, \omega|_p) \in T^*M$ 称为 A 上的**光滑余切向量场**.

定义 3.19 (张量). 多重线性函数 $T : (T_p^*M)^{\otimes r} \otimes (T_pM)^{\otimes s} \to \mathbb{R}$ 称为 $p \in M$ 处的 (r, s) 型**张量**. 特别地, 称 $(r, 0)$ 型张量为 r 阶**反变张量**, 称 $(0, s)$ 型张量为 s 阶**协变张量**.

注 3.20. 切向量 $\xi = \xi^i\frac{\partial}{\partial x^i}$ 是 1 阶反变张量, 余切向量 $\mathrm{d}f = f_i\mathrm{d}x^i$ 是 1 阶协变张量.

命题 3.21. *在图卡 (U, x) 里, (r, s) 型张量有唯一表示 $T = T^{i_1,\dots,i_r}_{j_1,\dots,j_s}\frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes\cdots\otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_r}} \otimes \mathrm{d}x^{j_1} \otimes\cdots\otimes \mathrm{d}x^{j_s}$, 其中 $T^{i_1,\dots,i_r}_{j_1,\dots,j_s} = T(\mathrm{d}x^{i_1}, \dots, \mathrm{d}x^{i_r}, \frac{\partial}{\partial x^{j_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{j_s}})$. 可以理解为 $T \in T_p^{(r,s)}M = (T_pM)^{\otimes r} \otimes (T_p^*M)^{\otimes s}$.*

定义 3.22 (自然基底). 称 $\{\frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes\cdots\otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_r}} \otimes \mathrm{d}x^{j_1} \otimes\cdots\otimes \mathrm{d}x^{j_s}\}$ 为 $T^{(r,s)}M$ 在 (U, x) 里的**自然基底**.

定义 3.23 (张量丛). 称 $T^{(r,s)}M = \{(p, T) : p \in M, T \in T_p^{(r,s)}M\}$ 为流形 M 的 (r, s) 型**张量丛**.

定义 3.24 (张量场). 光滑映射 $T : p \in A \subset M \mapsto (p, T|_p) \in T^{(r,s)}M$ 称为 A 上的 (r, s) 型**光滑张量场**.

习题 3.1. *设 ξ, η, ζ 是光滑切向量场.*

(a) 验证 Lie 括号运算满足反交换律 $[\xi, \eta] = -[\eta, \xi]$.

*(b) 验证 Lie 括号运算满足 **Jacobi 恒等式** $[\xi, [\eta, \zeta]] + [\eta, [\zeta, \xi]] + [\zeta, [\xi, \eta]] = 0$.*

(c) 证明 $L_\xi = [\xi, \bullet]$ 与 Lie 括号有类似于 Leibniz 法则的关联 $L_\xi([\eta, \zeta]) = [L_\xi(\eta), \zeta] + [\eta, L_\xi(\zeta)]$.

证明. (a) 由定义, $[\xi, \eta] = \xi\eta - \eta\xi = -(\eta\xi - \xi\eta) = -[\eta, \xi]$.

(b) 只需将下述三个式子相加:
$$\begin{cases} [\xi, [\eta, \zeta]] = \xi\eta\zeta - \xi\zeta\eta - \eta\zeta\xi + \zeta\eta\xi \\ [\eta, [\zeta, \xi]] = \eta\zeta\xi - \eta\xi\zeta - \zeta\xi\eta + \xi\zeta\eta \\ [\zeta, [\xi, \eta]] = \zeta\xi\eta - \zeta\eta\xi - \xi\eta\zeta + \eta\xi\zeta \end{cases}$$

(c) $L_\xi([\eta, \zeta]) = [\xi, [\eta, \zeta]] = -[\eta, [\zeta, \xi]] - [\zeta, [\xi, \eta]] = [\eta, [\xi, \zeta]] + [[\xi, \eta], \zeta] = [\eta, L_\xi(\zeta)] + [L_\xi(\eta), \zeta]$. ■

习题 3.2. 设 M 是光滑流形, $f: M \to \mathbb{R}$ 是光滑函数. 是否可以定义一个 2 阶协变张量场 T, 使得在每个光滑图卡 (U,x) 里 $T = \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}\,\mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j$? 为什么? (提示: 分析 2 阶协变张量的坐标变换公式.)

解. 任取光滑图卡 (U,x) 和 (V,y). 设 $T = \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}\,\mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j$, 则 $T(\frac{\partial}{\partial y^\lambda} \otimes \frac{\partial}{\partial y^\mu}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}\frac{\partial x^i}{\partial y^\lambda}\frac{\partial x^j}{\partial y^\mu}$, 即得 $T = \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}\frac{\partial x^i}{\partial y^\lambda}\frac{\partial x^j}{\partial y^\mu}\,\mathrm{d}y^\lambda \otimes \mathrm{d}y^\mu$. 另一方面, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^\lambda \partial y^\mu} = \frac{\partial}{\partial y^\lambda}(\frac{\partial f}{\partial y^\mu}) = \frac{\partial x^i}{\partial y^\lambda}\frac{\partial}{\partial x^i}(\frac{\partial f}{\partial x^j}\frac{\partial x^j}{\partial y^\mu}) = \frac{\partial x^i}{\partial y^\lambda}\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}\frac{\partial x^j}{\partial y^\mu} + r_{\lambda\mu}$, 其中 $r_{\lambda\mu} = \frac{\partial f}{\partial x^j}\frac{\partial^2 x^j}{\partial y^\lambda \partial y^\mu}$ 一般非零. 综上, 未必有 $T = \frac{\partial^2 f}{\partial y^\lambda \partial y^\mu}\,\mathrm{d}y^\lambda \otimes \mathrm{d}y^\mu$, 所以题中所求一般不成立. ////

习题 3.3. 考察单位球面 $S^2 \subset \mathbb{R}^3$, 取极坐标 (θ,φ) 表示 $(\sin\varphi\cos\theta, \sin\varphi\sin\theta, \cos\varphi)$. 记含入映射为 $i: S^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$, $(x,y,z) \mapsto (x,y,z)$. 找出形如 $a\,\mathrm{d}x + b\,\mathrm{d}y + c\,\mathrm{d}z$ 的 $\mathbb{R}^3$ 里的余切向量 ω_θ 和 ω_φ, 使得 $i^*(\omega_\theta) = \mathrm{d}\theta$ 和 $i^*(\omega_\varphi) = \mathrm{d}\varphi$.

解. 回顾2.7, 利用 (θ,φ) 表示 (x,y,z), 我们有 $i_*(\frac{\partial}{\partial\theta}) = -\sin\varphi\sin\theta\frac{\partial}{\partial x} + \sin\varphi\cos\theta\frac{\partial}{\partial y} = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$ 和 $i_*(\frac{\partial}{\partial\varphi}) = \cos\varphi\cos\theta\frac{\partial}{\partial x} + \cos\varphi\sin\theta\frac{\partial}{\partial y} - \sin\varphi\frac{\partial}{\partial z} = \frac{xz}{\sqrt{1-z^2}}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{yz}{\sqrt{1-z^2}}\frac{\partial}{\partial y} - \sqrt{1-z^2}\frac{\partial}{\partial z}$. 为方便求解, 记 $\omega_\theta = a_\theta\,\mathrm{d}x + b_\theta\,\mathrm{d}y + c_\theta\,\mathrm{d}z$. 由 $\langle\omega_\theta, i_*(\frac{\partial}{\partial\theta})\rangle = \langle i^*(\omega_\theta), \frac{\partial}{\partial\theta}\rangle = \langle\mathrm{d}\theta, \frac{\partial}{\partial\theta}\rangle = 1$ 可知 $-ya_\theta + xb_\theta = 1$, 由 $\langle\omega_\theta, i_*(\frac{\partial}{\partial\varphi})\rangle = \langle i^*(\omega_\theta), \frac{\partial}{\partial\varphi}\rangle = \langle\mathrm{d}\theta, \frac{\partial}{\partial\varphi}\rangle = 0$ 可知 $xza_\theta + yzb_\theta - (1-z^2)c_\theta = 0$, 满足这两个约束的 ω_θ 即为所求; 注意 ω_θ 可以对 S^2 的法向量任意赋值. 同理, $\omega_\varphi = a_\varphi\,\mathrm{d}x + b_\varphi\,\mathrm{d}y + c_\varphi\,\mathrm{d}z$, 满足 $-ya_\varphi + xb_\varphi = 0$ 和 $xza_\varphi + yzb_\varphi - (1-z^2)c_\varphi = \sqrt{1-z^2}$. 注意南北极处 $\frac{\partial}{\partial\theta}$ 和 $\frac{\partial}{\partial\varphi}$ 不良定, 因而不存在 $\mathrm{d}\theta$ 和 $\mathrm{d}\varphi$, 需要换用其他图卡来讨论切空间和余切空间. ////

4 张量的运算 (2021 年 3 月 24 日)

命题 4.1. 设 (U,x) 和 (V,y) 是光滑图卡, 我们有以下**坐标变换公式**:

- 若 $\xi = \xi^i\frac{\partial}{\partial x^i}$, 则 $\xi = \xi^i\frac{\partial y^j}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial y^j}$.
- 若 $\omega = \omega_i\mathrm{d}x^i$, 则 $\omega = \omega_i\frac{\partial x^i}{\partial y^j}\mathrm{d}y^j$.
- 若 $T = T^{i_1,\dots,i_r}_{j_1,\dots,j_s}\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\otimes\cdots\otimes\frac{\partial}{\partial x^{i_r}}\otimes\mathrm{d}x^{j_1}\otimes\cdots\otimes\mathrm{d}x^{j_s}$, 则 $T = \widetilde{T}^{k_1,\dots,k_r}_{\ell_1,\dots,\ell_s}\frac{\partial}{\partial y^{k_1}}\otimes\cdots\otimes\frac{\partial}{\partial y^{k_r}}\otimes\mathrm{d}y^{\ell_1}\otimes\cdots\otimes\mathrm{d}y^{\ell_s}$, 其中 $\widetilde{T}^{k_1,\dots,k_r}_{\ell_1,\dots,\ell_s} = T^{i_1,\dots,i_r}_{j_1,\dots,j_s}\frac{\partial y^{k_1}}{\partial x^{i_1}}\cdots\frac{\partial y^{k_r}}{\partial x^{i_r}}\frac{\partial x^{j_1}}{\partial y^{\ell_1}}\cdots\frac{\partial x^{j_s}}{\partial y^{\ell_s}}$.

定义 4.2 (张量积). 设 $S \in T^{(r,s)}$ 和 $T \in T^{(t,u)}$ 是张量, 则其**张量积** $S \otimes T \in T^{(r+t,s+u)}$ 有对自然基底的坐标 $(S\otimes T)^{i_1,\dots,i_r,k_1,\dots,k_t}_{j_1,\dots,j_s,\ell_1,\dots,\ell_u} = S^{i_1,\dots,i_r}_{j_1,\dots,j_s}T^{k_1,\dots,k_t}_{\ell_1,\dots,\ell_u}$. (不依赖图卡的选择, 是良定义的. 下同.)

命题 4.3. 张量积满足结合律和多重线性.

定义 4.4 (张量的指标置换). 设 $T \in T^{(r,s)}$ 是张量, σ 是 $\{1,\cdots,r\}$ 的置换, θ 是 $\{1,\cdots,s\}$ 的置换, 则**指标置换** ${}^{\sigma}_{\theta}T \in T^{(r,s)}$ 有对自然基底的坐标 $({}^{\sigma}_{\theta}T)^{i_1,\dots,i_r}_{j_1,\dots,j_s} = T^{i_{\sigma(1)},\dots,i_{\sigma(r)}}_{j_{\theta(1)},\dots,j_{\theta(s)}}$.

定义 4.5 (张量缩并). 设 $T \in T^{(r,s)}$ 是张量, 则其 (k,ℓ) **缩并** $\subset^k_\ell T \in T^{(r-1,s-1)}$ 有对自然基底的坐标 $(\subset^k_\ell T)^{i_1,\dots,i_{r-1}}_{j_1,\dots,j_{s-1}} = T^{i_1,\dots,i_{k-1},\lambda,i_k,\dots,i_{r-1}}_{j_1,\dots,j_{\ell-1},\lambda,j_\ell,\dots,j_{s-1}}$.

注 4.6. 对于矩阵 $A = (a^i_j) \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, 有 $\subset^1_1 A = a^i_i = \mathrm{tr}(A)$.

定义 4.7 (张量的推前和拉回). 设 $f: M \to N$ 是光滑映射. 按

$$f_*(T)(\omega^1,\dots,\omega^r) = T(f^*(\omega^1),\dots,f^*(\omega^r))$$

定义 $f_*: T \in T^{(r,0)}_p M \mapsto f_*(T) \in T^{(r,0)}_{f(p)}N$, 称为 f 诱导的反变张量的**推前映射**. 按

$$f^*(T)(v_1,\dots,v_s) = T(f_*(v_1),\dots,f_*(v_s))$$

定义 $f^*: T \in T^{(0,s)}_{f(p)}N \mapsto f^*(T) \in T^{(0,s)}_p M$, 称为 f 诱导的协变张量的**拉回映射**.

定义 4.8 (Riemann 度量)**.** 设 g 是光滑流形 M 上的 2 阶光滑协变张量场, 满足

1. (对称) $g|_p(\xi,\eta) = g|_p(\eta,\xi)$, $\forall \xi,\eta \in T_pM, \forall p \in M$
2. (正定) $g|_p(\xi,\xi) > 0$, $\forall \xi \neq 0$

则 g 称为一个 **Riemann 度量**, 在 $p \in M$ 处给出 T_pM 上的内积. 此时, M 称为 **Riemann 流形**.

注 4.9. 设 $\iota : M \to \mathbb{R}^n$ 是光滑浸入, 则 $g(\xi,\eta) = \langle \iota_*(\xi), \iota_*(\eta)\rangle$ 是 M 上的 Riemann 度量.

注 4.10. 将正定放松为满秩 (正负惯性系数是常值且和为 $\dim M$), 则得到**伪 Riemann 度量**.

注 4.11. 狭义相对论中, $\mathbb{R}^4$ 上的伪 Riemann 度量 $-c^2\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2$ 称为 Minkowski 度量.

定义 4.12 (升降指标)**.** 设 g 是伪 Riemann 度量, 记 $g = (g_{ij})$ 和 $\sharp g = (g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}$, 易见 $\sharp g$ 是 2 阶光滑反变张量场. 对 $T = (T^{i_1,\dots,i_r}_{j_1,\dots,j_s}) \in T^{(r,s)}$, **降指标** $\downarrow^k_\ell T \in T^{(r-1,s+1)}$ 有坐标 $(\downarrow^k_\ell T)^{i_1,\dots,i_{r-1}}_{j_1,\dots,j_{\ell-1},\lambda,j_\ell,\dots,j_s} = g_{\lambda,\mu} T^{i_1,\dots,i_{k-1},\mu,i_k,\dots,i_{r-1}}_{j_1,\dots,j_s}$, **升指标** $\uparrow^k_\ell T \in T^{(r+1,s-1)}$ 有坐标 $(\uparrow^k_\ell T)^{i_1,\dots,i_{k-1},\lambda,i_k,\dots,i_r}_{j_1,\dots,j_{s-1}} = g^{\lambda,\mu} T^{i_1,\dots,i_r}_{j_1,\dots,j_{\ell-1},\mu,j_\ell,\dots,j_{s-1}}$.

定义 4.13 (Lie 导数)**.** 设 ξ 是切向量场, 则 $L_\xi(\eta) = [\xi,\eta]$ 称为切向量场 η 关于 ξ 的 **Lie 导数**.

命题 4.14. *设 ξ,η,ζ 是光滑切向量场, 则 $L_{[\xi,\eta]}(\zeta) = L_\xi(L_\eta(\zeta)) - L_\eta(L_\xi(\zeta))$.*

命题 4.15 (自然性)**.** *设 $f : M \to N$ 是光滑映射. 若 $f_*(\xi) = \tilde{\xi}$ 且 $f_*(\eta) = \tilde{\eta}$, 则 $f_*(L_\xi(\eta)) = L_{\tilde{\xi}}(\tilde{\eta})$.*

命题 4.16. *设 h 是光滑函数, ξ 和 η 是光滑切向量场, 则 $L_\xi(h\eta) = \partial_\xi(h)\eta + hL_\xi(\eta)$.*

推论 4.17. *向量场对自然基底求 Lie 导数即按分量求偏导: $L_{\frac{\partial}{\partial x^j}}(h^i \frac{\partial}{\partial x^i}) = \frac{\partial h^i}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial x^i}$.*

命题 4.18. *若 $(\xi,\eta) \mapsto \mathcal{L}_\xi(\eta)$ 是反对称双线性映射, 且满足4.17和4.16, 则 $\mathcal{L} = L$.*

定义 4.19 (张量场的 Lie 导数)**.** 设 ξ 是光滑切向量场, T 是 (r,s) 型张量场, 则 T 关于 ξ 的 **Lie 导数** $L_\xi(T)$ 也是 (r,s) 型张量场, 满足

1. 若 a 和 b 是常数, R 和 S 是同阶张量场, 则 $L_\xi(aR + bS) = aL_\xi(R) + bL_\xi(S)$
2. 若 h 是函数, 则 $L_\xi(h) = \partial_\xi(h)$
3. 若 ω 是余切向量场, η 是切向量场, 则 $\partial_\xi(\langle\omega,\eta\rangle) = \langle L_\xi(\omega),\eta\rangle + \langle\omega, L_\xi(\eta)\rangle$
4. 若 R 和 S 是张量场, 则 $L_\xi(R \otimes S) = L_\xi(R) \otimes S + R \otimes L_\xi(S)$

习题 4.1. *用多重线性映射定义和局部坐标表示两种方式, 证明光滑映射拉回光滑协变张量场得到的还是光滑协变张量场.*

证明. 设光滑映射 $f : M \to N$ 把 $T \in T^{(0,s)}N$ 拉回为 $f^*(T)$, 往证 $f^*(T) \in T^{(0,s)}M$. 任取 $1 \leq k \leq s$, 若 $h : M \to \mathbb{R}$ 是光滑函数, $\zeta,\xi_1,\dots,\xi_s \in \Gamma(TM)$, 则

$$\begin{aligned} f^*(T)(\xi_1,\dots,\xi_{k-1},h\xi_k+\zeta,\xi_{k+1},\dots,\xi_s) &= T(f_*(\xi_1),\dots,f_*(\xi_{k-1}),f_*(h\xi_k+\zeta),f_*(\xi_{k+1}),\dots,f_*(\xi_s)) \\ &= T(f_*(\xi_1),\dots,f_*(\xi_{k-1}),hf_*(\xi_k)+f_*(\zeta),f_*(\xi_{k+1}),\dots,f_*(\xi_s)) \\ &= hT(f_*(\xi_1),\dots,f_*(\xi_s)) + T(\dots,f_*(\xi_{k-1}),f_*(\zeta),f_*(\xi_{k+1}),\dots) \\ &= hf^*(T)(\xi_1,\dots,\xi_s) + f^*(T)(\dots,\xi_{k-1},\zeta,\xi_{k+1},\dots). \end{aligned}$$

若 T 光滑, 则 $f^*(T)(\xi_1,\dots,\xi_s) = T(f_*(\xi_1),\dots,f_*(\xi_s))$ 光滑, $\forall \xi_1,\dots,\xi_s \in \Gamma(TM)$, 于是 $f^*(T)$ 光滑. 设 (U,x) 是 M 图卡, (V,y) 是 N 图卡. 将 T 写成 $T = T_{j_1,\dots,j_s}\mathrm{d}y^{j_1} \otimes \dots \otimes \mathrm{d}y^{j_s}$, 其中 $T_{j_1,\dots,j_s} = T(\frac{\partial}{\partial y^{j_1}},\dots,\frac{\partial}{\partial y^{j_s}})$, 则 $f^*(T) = (T_{j_1,\dots,j_s}\circ f)f^*(\mathrm{d}y^{j_1}\otimes\dots\otimes\mathrm{d}y^{j_s}) = (T_{j_1,\dots,j_s}\circ f)f^*(\mathrm{d}y^{j_1})\otimes\dots\otimes f^*(\mathrm{d}y^{j_s}) = (T_{j_1,\dots,j_s}\circ f)(\frac{\partial y^{j_1}\circ f}{\partial x^{i_1}}\mathrm{d}x^{i_1}) \otimes \dots \otimes (\frac{\partial y^{j_s}\circ f}{\partial x^{i_s}}\mathrm{d}x^{i_s}) = (T_{j_1,\dots,j_s}\circ f)\frac{\partial y^{j_1}\circ f}{\partial x^{i_1}}\cdots\frac{\partial y^{j_s}\circ f}{\partial x^{i_s}}\mathrm{d}x^{i_1}\otimes\dots\otimes\mathrm{d}x^{i_s}$. ■

注. 张量场光滑 $\iff$ 张量场的局部坐标各分量光滑

$\iff$ 张量场把任意光滑余切向量场和光滑切向量场的序列映射成光滑函数

习题 4.2. 设 f 是光滑函数, ξ 和 η 是光滑切向量场, ω 是光滑余切向量场. 我们知道 *Lie* 导数满足 $L_\xi(f\eta) = \partial_\xi(f)\eta + fL_\xi(\eta)$, 求 $L_{f\xi}(\eta), L_\xi(f\omega), L_{f\xi}(\omega)$ 所满足的类似的公式.

解. 由于 Lie 括号反对称, $L_{f\xi}(\eta) = -L_\eta(f\xi) = -\partial_\eta(f)\xi - fL_\eta(\xi) = fL_\xi(\eta) - \partial_\eta(f)\xi$.

在 $\langle L_\xi(f\omega), \eta\rangle + \langle f\omega, L_\xi(\eta)\rangle = \partial_\xi(\langle f\omega, \eta\rangle) = \partial_\xi(\langle \omega, f\eta\rangle) = \langle L_\xi(\omega), f\eta\rangle + \langle \omega, L_\xi(f\eta)\rangle$ 两端减去 $f\langle\omega, L_\xi(\eta)\rangle$, 可得 $\langle L_\xi(f\omega), \eta\rangle = f\langle L_\xi(\omega), \eta\rangle + \langle \omega, \partial_\xi(f)\eta\rangle$. 而 η 任意, 故 $L_\xi(f\omega) = fL_\xi(\omega) + \partial_\xi(f)\omega$.

由 $\langle L_{f\xi}(\omega), \eta\rangle + \langle\omega, L_{f\xi}(\eta)\rangle = \partial_{f\xi}(\langle\omega, \eta\rangle) = f\partial_\xi(\langle\omega,\eta\rangle) = f\langle L_\xi(\omega), \eta\rangle + f\langle \omega, L_\xi(\eta)\rangle$ 可得 $\langle L_{f\xi}(\omega), \eta\rangle = \langle fL_\xi(\omega), \eta\rangle + \langle \omega, \partial_\eta(f)\xi\rangle$, 其中 $\partial_\eta(f) = \langle \mathrm{d}f, \eta\rangle$. 而 η 任意, 故 $L_{f\xi}(\omega) = fL_\xi(\omega) + \langle\omega, \xi\rangle\mathrm{d}f$. ////

习题 4.3. 设 ξ 是 $\mathbb{R}^2$ 上的光滑切向量场, 且 $L_\xi(g) \equiv 0$, 其中 $g = \mathrm{d}x^1 \otimes \mathrm{d}x^1 + \mathrm{d}x^2 \otimes \mathrm{d}x^2$ 是 $\mathbb{R}^2$ 上的标准 *Riemann* 度量. 在 $p = (0,0)$ 处, 记 $\xi|_p = c^1\frac{\partial}{\partial x^1}|_p + c^2\frac{\partial}{\partial x^2}|_p$. 证明存在光滑函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, 使得 $\xi = (c^1 + f(x^2))\frac{\partial}{\partial x^1} + (c^2 - f(x^1))\frac{\partial}{\partial x^2}$.

证明. 令 $\xi^i = \langle \mathrm{d}x^i, \xi\rangle$, 则 $\xi = \xi^i\frac{\partial}{\partial x^i}$, 且 $L_\xi(\frac{\partial}{\partial x^j}) = [\xi, \frac{\partial}{\partial x^j}] = -\frac{\partial \xi^i}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial x^i}$. 由于 $\langle \mathrm{d}x^i, \frac{\partial}{\partial x^j}\rangle = \delta^i_j$ 是常值函数, $\langle L_\xi(\mathrm{d}x^i), \frac{\partial}{\partial x^j}\rangle = \partial_\xi(\langle \mathrm{d}x^i, \frac{\partial}{\partial x^j}\rangle) - \langle \mathrm{d}x^i, L_\xi(\frac{\partial}{\partial x^j})\rangle = \frac{\partial\xi^i}{\partial x^j}$, 于是 $L_\xi(\mathrm{d}x^i) = \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j}\mathrm{d}x^j$, 进而 $L_\xi(\mathrm{d}x^i\otimes\mathrm{d}x^i) = L_\xi(\mathrm{d}x^i)\otimes\mathrm{d}x^i + \mathrm{d}x^i\otimes L_\xi(\mathrm{d}x^i)$ 被确定. 我们有 $L_\xi(g) = L_\xi(\mathrm{d}x^1\otimes\mathrm{d}x^1) + L_\xi(\mathrm{d}x^2\otimes\mathrm{d}x^2) = (2\frac{\partial\xi^1}{\partial x^1}\mathrm{d}x^1\otimes\mathrm{d}x^1 + \frac{\partial\xi^1}{\partial x^2}\mathrm{d}x^1\otimes\mathrm{d}x^2 + \frac{\partial\xi^1}{\partial x^2}\mathrm{d}x^2\otimes\mathrm{d}x^1) + (\frac{\partial\xi^2}{\partial x^1}\mathrm{d}x^1\otimes\mathrm{d}x^2 + \frac{\partial\xi^2}{\partial x^1}\mathrm{d}x^2\otimes\mathrm{d}x^1 + 2\frac{\partial\xi^2}{\partial x^2}\mathrm{d}x^2\otimes\mathrm{d}x^2) = 2\frac{\partial\xi^1}{\partial x^1}\mathrm{d}x^1\otimes\mathrm{d}x^1 + (\frac{\partial\xi^1}{\partial x^2} + \frac{\partial\xi^2}{\partial x^1})(\mathrm{d}x^1\otimes\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}x^2\otimes\mathrm{d}x^1) + 2\frac{\partial\xi^2}{\partial x^2}\mathrm{d}x^2\otimes\mathrm{d}x^2$ 各分量都恒为零, 所以存在函数 ϕ 和 ψ, 使得 $\xi^1|_{(x^1,x^2)} = \phi(x^2)$ 和 $\xi^2|_{(x^1,x^2)} = \psi(x^1)$, 且 $\phi'(x^2) + \psi'(x^1) \equiv 0$. 固定 x^1, 让 x^2 变动, 可知 ϕ' 是常数, 记为 a. 让 x^1 变动, 则有 $\psi' \equiv -a$. 不难发现 $f(t) = at$ 即为所求. ■

5 Lie 导数 (2021 年 3 月 31 日)

命题 5.1. 对于 $\xi = \xi^i\frac{\partial}{\partial x^i}$ 和 $\omega = \omega_i\mathrm{d}x^i$, 有 $L_\xi(\omega) = (\xi^j\frac{\partial\omega_i}{\partial x^j} + \omega_j\frac{\partial\xi^j}{\partial x^i})\mathrm{d}x^i$.

命题 5.2. 对于 $\xi = \xi^i\frac{\partial}{\partial x^i}$ 和 $T = T^{i_1,\dots,i_r}_{j_1,\dots,j_s}\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\otimes\cdots\otimes\frac{\partial}{\partial x^{i_r}}\otimes\mathrm{d}x^{j_1}\otimes\cdots\otimes\mathrm{d}x^{j_s}$, 有 $L_\xi(T) = (\xi^\lambda\frac{\partial T^{i_1,\dots,i_r}_{j_1,\dots,j_s}}{\partial x^\lambda} - \sum_k T^{\dots,i_{k-1},\lambda,i_{k+1},\dots}_{j_1,\dots,j_s}\frac{\partial \xi^{i_k}}{\partial x^\lambda} + \sum_\ell T^{i_1,\dots,i_r}_{\dots,j_{\ell-1},\lambda,j_{\ell+1},\dots}\frac{\partial\xi^\lambda}{\partial x^{j_\ell}})\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\otimes\cdots\otimes\frac{\partial}{\partial x^{i_r}}\otimes\mathrm{d}x^{j_1}\otimes\cdots\otimes\mathrm{d}x^{j_s}$.

定义 5.3 (单参数变换群). 一族以 $t\in(-\delta,\delta)\subset\mathbb{R}$ 为指标的变换 $\varphi_t: U\subset M\to M$ 构成**单参数变换局部群**, 若 $\varphi_0 = \mathrm{Id}: U\hookrightarrow M$, 且对任意 s 和 t 有 $\varphi_{s+t} = \varphi_s\circ\varphi_t$.

定义 5.4 (流). 单参数变换局部群 $\{\varphi_t: U\to M\}_{t\in(-\delta,\delta)}$ 决定的 $\Phi: (p,t)\in U\times(-\delta,\delta)\mapsto\varphi_t(p)\in M$ 称为**单参数局部流**, 并且 $\gamma_p(t) = \Phi(p,t)$ 称为从 p 出发的**流线**.

注 5.5. 我们有 $\Phi(p,0) = p$ 和 $\Phi(p,s+t) = \Phi(\Phi(p,s),t)$. 对应地, $\gamma_p(0) = p$ 且 $\gamma_p(s+t) = \gamma_{\gamma_p(s)}(t)$.

命题 5.6. 光滑单参数局部流的从任意点出发的流线存在且唯一, 是光滑曲线或光滑闭曲线或单点集.

定义 5.7 (光滑单参数变换群). 若单参数局部流 $\Phi(p,t) = \varphi_t(p)$ 是 $U\times(-\delta,\delta)$ 到 M 的光滑映射, 则 $\{\varphi_t\}$ 称为**光滑单参数变换局部群**.

定理 5.8. 设 ξ 是 M 上的光滑切向量场, 则对任意 $p\in M$, 存在 p 的开邻域 $U\subset M$ 以及唯一的光滑单参数局部流 $\Phi: U\times(-\delta,\delta)\to M$, 使得 $\xi|_q = \frac{\partial\Phi(q,t)}{\partial t}|_{t=0}$, $\forall q\in U$. 换言之, $\xi|_q = \gamma'(0) = \gamma_*(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|_{t=0})$, 其中 $\gamma(t) = \Phi(q,t)$ 是从 q 出发的流线. (Thm. 9.12 in Lee's Introduction to Smooth Manifolds)

证明. 由常微分方程的 Picard–Lindelöf 定理可得. □

命题 5.9 (Lie 导数的几何解释). 设 ξ 是处处非零的光滑切向量场, 在 p 处由单参数变换局部群 $\{\varphi_t\}$ 实现, 则 $L_\xi(\eta)|_p = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{(\varphi_{-t})_*(\eta|_{\varphi_t(p)}) - \eta|_p}{t}$, 其中 η 是任意光滑切向量场.

证明. 根据引理3.3, 取图卡 (U,x) 使 $\xi = \frac{\partial}{\partial x^1}$. 记 $\eta = \eta^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, 则 $L_\xi(\eta) = \frac{\partial \eta^i}{\partial x^1}\frac{\partial}{\partial x^i}$. 易见 $x(\varphi_t(p)) = x(p) + (t, 0, \cdots, 0)$, 因此对 $(\varphi_{-t})_*(\eta|_{\varphi_t(p)})$ 的局部坐标分量 $\eta^i(\varphi_t(p))$ 作用 $\frac{\partial}{\partial t}|_{t=0}$ 恰好得到 $\frac{\partial \eta^i}{\partial x^1}|_p$. □

习题 5.1. *考察平面 $\mathbb{R}^2$ 上的光滑切向量场 $\xi = (x^2+y^2)(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y})$.*

(a) 写出实现 ξ 的光滑单参数变换群 $\{\varphi_t\}$ 及相应的光滑单参数流 $\Phi(x,y,t)$.

(b) 显然常值映射 $\gamma_0(t) = (0,0)$ 是一条经过原点的流线. 是否还有其他的经过原点的光滑曲线 γ, 使得在 γ 上每点都成立 $\gamma'(t) = \xi|_{\gamma(t)}$?

解. 任取 $p = (x_0, y_0)$, 设 $\gamma_p(t) = (x_p(t), y_p(t))$ 是 ξ 决定的从 p 出发的积分曲线, 适合 $\gamma_p'(t) = \xi|_{\gamma_p(t)}$. 解微分方程可得 $\gamma_p(t) = \frac{(x_0,y_0)}{\sqrt{1-2(x_0^2+y_0^2)t}}$, 进而 $\varphi_t(x,y) = \Phi(x,y,t) = \frac{(x,y)}{\sqrt{1-2(x^2+y^2)t}}$ 即为所求, 而且当 $p \neq (0,0)$ 时 γ_p 不可能经过原点. 参看 VectorPlot in Wolfram|Alpha. ////

习题 5.2. *仿照切向量场 Lie 导数的几何解释, 给出并证明余切向量场 Lie 导数的几何解释.*

解. 设 ξ 是处处非零的光滑切向量场, 在 p 处由单参数变换局部群 $\{\varphi_t\}$ 实现, 则对任意光滑余切向量场 ω 都有 $L_\xi(\omega)|_p = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{(\varphi_t)^*(\omega|_{\varphi_t(p)}) - \omega|_p}{t}$. 证明也是类似的, 如下所示.

根据引理3.3, 取图卡 (U,x) 使 $\xi = \frac{\partial}{\partial x^1}$. 记 $\omega = \omega_i \mathrm{d}x^i$, 则 $L_\xi(\omega) = \frac{\partial \omega_i}{\partial x^1}\mathrm{d}x^i$. 易见 $x(\varphi_t(p)) = x(p) + (t, 0, \cdots, 0)$, 因此对 $(\varphi_t)^*(\omega|_{\varphi_t(p)})$ 的局部坐标分量 $\omega_i(\varphi_t(p))$ 作用 $\frac{\partial}{\partial t}|_{t=0}$ 恰好得到 $\frac{\partial \omega_i}{\partial x^1}|_p$. ////

习题 5.3. *设 Riemann 流形 (M,g) 上的光滑切向量场 ξ 处处非零, 且 $L_\xi(g) \equiv 0$. 将 ξ 决定的单参数变换群记为 $\{\varphi_t\}$. 证明 φ_t 是等距, 即 $|(\varphi_t)_*(v)| = |v|$ 对任意切向量 v 成立, 其中 $|\bullet| = \sqrt{g(\bullet,\bullet)}$.*

证明. 此题中的 ξ 称为 **Killing 向量场**. 对于 $|(\varphi_t)_*(v)|^2 = g((\varphi_t)_*(v), (\varphi_t)_*(v)) = (\varphi_t)^*(g)(v,v)$, 可见 $\frac{\partial}{\partial t}|(\varphi_t)_*(v)|^2 = \frac{\partial}{\partial t}(\varphi_t)^*(g)(v,v) = L_\xi(g)((\varphi_t)_*(v), (\varphi_t)_*(v))$ 恒为零, 所以 $|(\varphi_t)_*(v)|^2 = |v|^2$. ■

6 微分形式 (2021 年 4 月 2 日)

定义 6.1 (微分形式). 交错的 k 阶光滑协变张量场称为 **k-形式**, 组成的集合记为 Ω^k.

注 6.2. 在 $p \in M$ 处的交错 k 阶协变张量组成的集合记为 $\bigwedge^k T_p^*M$.

注 6.3. 交错 $[\omega(\cdots,\xi,\cdots,\xi,\cdots) = 0]$ 等价于反对称 $[\omega(\cdots,\xi,\cdots,\eta,\cdots) = -\omega(\cdots,\eta,\cdots,\xi,\cdots)]$.

定义 6.4 (Levi–Civita 符号). 对于 $\sigma: \{1,\cdots,k\} \to \{1,\cdots,k\}$, 记 $\varepsilon_\sigma = \begin{cases} 1, & \sigma\text{是}(1,\cdots,k)\text{的偶置换;} \\ -1, & \sigma\text{是}(1,\cdots,k)\text{的奇置换;} \\ 0, & \sigma\text{不是}(1,\cdots,k)\text{的置换.} \end{cases}$

注 6.5. 用 $\mathfrak{S}_k$ 表示 k 阶置换群, 则 $\varepsilon_\sigma = \mathrm{sgn}(\sigma)$, $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_k$.

命题 6.6. *设 $\omega = \omega_{i_1,\ldots,i_k}\,\mathrm{d}x^{i_1} \otimes \cdots \otimes \mathrm{d}x^{i_k}$ 交错, 则 $\omega_{i_{\sigma(1)},\ldots,i_{\sigma(k)}} = \varepsilon_\sigma \omega_{i_1,\ldots,i_k}$.*

定义 6.7 (自然基底). 约定 $\mathrm{d}x^I = \mathrm{d}x^{i_1,\ldots,i_k} = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_k} \mathrm{sgn}(\sigma)\,\mathrm{d}x^{i_{\sigma(1)}} \otimes\cdots\otimes \mathrm{d}x^{i_{\sigma(k)}}$, 其中 $I = (i_1,\ldots,i_k)$. 称 $\{\mathrm{d}x^{i_1,\ldots,i_k}|_p\}_{i_1<\cdots<i_k}$ 为 $\bigwedge^k T_p^*M$ 在图卡 (U,x) 里的**自然基底**.

命题 6.8. 任给 $\omega \in \bigwedge^k T_p^*M$ 和 $C = (C_j^i) \in M_{k\times k}(\mathbb{R})$. 若 $v_1, \ldots, v_k, \tilde{v}_1, \ldots, \tilde{v}_k \in T_pM$ 满足 $\tilde{v}_j = C_j^i v_i$, $1 \le j \le k$, 则 $\omega(\tilde{v}_1, \ldots, \tilde{v}_k) = \det(C)\,\omega(v_1, \ldots, v_k)$.

定义 6.9 (交错化). 设 ω 是 k 阶协变张量, 定义其**交错化**为 $\mathrm{Alt}(\omega) = \frac{1}{k!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_k} \mathrm{sgn}(\sigma)({}_\sigma\omega)$, 其中指标置换 ${}_\sigma\omega$ 见定义4.4, 满足 $({}_\sigma\omega)(v_1, \ldots, v_k) = \omega(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)})$.

推论 6.10. 协变张量 ω 交错当且仅当 $\mathrm{Alt}(\omega) = \omega$.

定义 6.11 (外积). 对于 $\alpha \in \bigwedge^k T_p^*M$ 和 $\beta \in \bigwedge^\ell T_p^*M$, 定义它们的**外积**为 $\alpha\wedge\beta = \frac{(k+\ell)!}{k!\ell!}\mathrm{Alt}(\alpha\otimes\beta)$.

引理 6.12. 记 $\alpha = \sum_{i_1<\cdots<i_k} \alpha_{i_1,\ldots,i_k} \mathrm{d}x^{i_1,\ldots,i_k}$ 和 $\beta = \sum_{j_1<\cdots<j_\ell} \beta_{j_1,\ldots,j_\ell}\mathrm{d}x^{j_1,\ldots,j_\ell}$, 则有

$$\alpha\wedge\beta = \sum_{i_1<\cdots<i_k;j_1<\cdots<j_\ell} \alpha_{i_1,\ldots,i_k}\beta_{j_1,\ldots,j_\ell}\,\mathrm{d}x^{i_1,\ldots,i_k,j_1,\ldots,j_\ell}.$$

证明. 利用 (k,ℓ)-shuffle, 即满足 $\sigma(1) < \cdots < \sigma(k)$ 和 $\sigma(k+1) < \cdots < \sigma(k+\ell)$ 的 $\sigma \in \mathfrak{S}_{k+\ell}$. □

命题 6.13. 对于 $(\alpha, \beta) \in \bigwedge^k T_p^*M \times \bigwedge^\ell T_p^*M$, 有 $\alpha\wedge\beta \in \bigwedge^{k+\ell} T_p^*M$, 且 $\beta\wedge\alpha = (-1)^{k\ell}\alpha\wedge\beta$.

注 6.14. 若 ω 是奇数阶交错协变张量, 则 $\omega\wedge\omega = 0$. 若 ω 是偶数阶交错协变张量, 则 $\omega\wedge\omega$ 未必为零.

命题 6.15. 外积满足结合律和多重线性.

注 6.16. 对 $\omega^1, \ldots, \omega^k \in T_p^*M$, 有 $\omega^1\wedge\cdots\wedge\omega^k = k!\,\mathrm{Alt}(\omega^1\otimes\cdots\otimes\omega^k) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_k}\mathrm{sgn}(\sigma)\,\omega^{\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes\omega^{\sigma(k)}$. 特别地, $\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_k} = \mathrm{d}x^{i_1,\ldots,i_k}$. 易见 $(\omega^1\wedge\cdots\wedge\omega^k)(v_1, \ldots, v_k) = \det(\omega^i(v_j))$, $\forall v_1, \ldots, v_k \in T_pM$.

命题 6.17. 设 ξ 是 M 上的切向量场, 则 $L_\xi(\alpha\wedge\beta) = L_\xi(\alpha)\wedge\beta + \alpha\wedge L_\xi(\beta)$, $\alpha\in\Omega^k(M), \beta\in\Omega^\ell(M)$.

命题 6.18 (自然性). 设 f 是流形之间的光滑映射, 则 $f^*(\alpha\wedge\beta) = f^*(\alpha)\wedge f^*(\beta)$.

定义 6.19 (标架场和余标架场). 设 M 是 n 维光滑流形. 局部定义的处处线性无关的切向量场 $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ 称为**局部标架场**, 其对偶的余切向量场 $(\omega^1, \ldots, \omega^n)$ 称为 **(对偶) 局部余标架场**, 满足 $\omega^i(\xi_j) = \delta^i_j$.

命题 6.20. 设 $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ 和 $(\omega^1, \ldots, \omega^n)$ 是 M 上的一对标架场和余标架场.

- 任取 (r,s) 型张量 T, 有 $T = T^{i_1,\ldots,i_r}_{j_1,\ldots,j_s}\,\xi_{i_1}\otimes\cdots\otimes\xi_{i_r}\otimes\omega^{j_1}\otimes\cdots\otimes\omega^{j_s}$, 其中 $T^{i_1,\ldots,i_r}_{j_1,\ldots,j_s} = T(\omega^{i_1}, \ldots, \omega^{i_r}, \xi_{j_1}, \ldots, \xi_{j_s})$. 事实上, $\{\xi_{i_1}\otimes\cdots\otimes\xi_{i_r}\otimes\omega^{j_1}\otimes\cdots\otimes\omega^{j_s}\}$ 构成 $T^{(r,s)}M$ 的基底.
- 任取 k-形式 θ, 有 $\theta = \sum_{i_1<\cdots<i_k}\theta_{i_1,\ldots,i_k}\,\omega^{i_1}\wedge\cdots\wedge\omega^{i_k}$, 其中 $\theta_{i_1,\ldots,i_k} = \theta(\xi_{i_1}, \ldots, \xi_{i_k})$. 事实上, $\{\omega^{i_1}\wedge\cdots\wedge\omega^{i_k}\}$ 构成 $\Omega^k(M)$ 的基底.

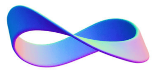
定义 6.21 (正交标架场). 称 Riemann 流形 (M, g) 上标架场 $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ **正交**, 若 $g(\xi_i, \xi_j) = \delta_{ij}$ $(\forall i, j)$.

注 6.22. 通过 $\mathbb{R}^3$ 上的标准内积诱导单位球面 S^2 上的 Riemann 度量. 在极坐标 (θ, φ) 下, 由2.7可知 $\xi_1 = \frac{1}{\sin\varphi}\frac{\partial}{\partial\theta}$ 和 $\xi_2 = \frac{\partial}{\partial\varphi}$ 构成正交标架场, 其对偶余标架场为 $\omega^1 = \sin\varphi\,\mathrm{d}\theta$ 和 $\omega^2 = \mathrm{d}\varphi$.

定义 6.23 (体积形式). 设 V 是 n 维 Riemann 流形 M 上局部定义的 n-形式乘一个符号因子, 从而是赝张量 (pseudotensor). 如果对 M 上的任意局部正交标架场 $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ 都有 $V(\xi_1, \ldots, \xi_n) = \pm 1$, 则称 V 为**局部体积形式**.

命题 6.24. 设 (M, g) 为 n 维 Riemann 流形, V 是图卡 (U, x) 上的体积形式, 则 $V = \pm\sqrt{|g|}\,\mathrm{d}x^{1,\cdots,n}$, 其中 $|g| = \det(g(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}))$.

定义 6.25 (定向). 流形 M 称为**可定向的**, 若存在覆盖 M 的**定向图册**, 其中任意图卡 (U_x, x) 和 (U_y, y) 都**定向相容**, 即满足 $\det(J_{y\circ x^{-1}}) > 0$. 换言之, 定向图册中图卡决定的自然基底之间的过渡矩阵保定向.

注 6.26. Möbius 带不可定向. (math.stackexchange.com/q/15602) 

命题 6.27. *设 M 是连通的 n 维微分流形, 则 M 可定向当且仅当 M 上存在整体定义的处处非零的 n-形式. 特别地, Riemann 流形可取符号恒正的体积形式.* (梅加强《流形与几何初步》命题 2.5.6)

注 6.28. 设 $(\xi_1,\dots,\xi_n)$ 是标架场, ω 是非零 n-形式. 若 $\omega(\xi_1,\dots,\xi_n)>0$, 则称 $(\xi_1,\dots,\xi_n)$ 与 ω 定向相容; 若 $\omega(\xi_1,\dots,\xi_n)<0$, 则称 $(\xi_1,\dots,\xi_n)$ 与 ω 定向相反. 由此, ω 决定了一个 **(正) 定向**, 即所有与 ω 定向相容的标架场组成的集合; ω 也决定了一个**负定向**, 即所有与 ω 定向相反的标架场组成的集合. 我们将图卡 (U,x) 的定向等同于自然标架场 $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}$ 的定向.

注 6.29. 一般的流形可在局部取连通开子集同胚于 $\mathbb{R}^n$, 从而得到局部定向.

习题 6.1. *设 α 是 k-形式, β 是 ℓ-形式. 任取一组向量 $\xi_1,\dots,\xi_{k+\ell}$, 已知 $\alpha^\xi_{i_1,\dots,i_k}=\alpha(\xi_{i_1},\dots,\xi_{i_k})$ 和 $\beta^\xi_{j_1,\dots,j_\ell}=\beta(\xi_{j_1},\dots,\xi_{j_\ell})$, 求 $(\alpha\wedge\beta)(\xi_1,\dots,\xi_{k+\ell})$.*

解. 令 $S(k,\ell)=\{\pi\in\mathfrak{S}_{k+\ell}:\pi(1)<\cdots<\pi(k),\ \pi(k+1)<\cdots<\pi(k+\ell)\}$, 其基数为 $|S(k,\ell)|=\frac{(k+\ell)!}{k!\ell!}$. 对于 $\lambda\in\mathfrak{S}_k$ 和 $\mu\in\mathfrak{S}_\ell$, 定义 $\lambda\boxplus\mu\in\mathfrak{S}_{k+\ell}$, 把 $i\le k$ 映射为 $\lambda(i)$, 把 $i>k$ 映射为 $k+\mu(i-k)$. 于是

$$
\begin{aligned}
(\alpha\wedge\beta)(\xi_1,\dots,\xi_{k+\ell}) &= \frac{1}{k!\ell!}\sum_{\theta\in\mathfrak{S}_{k+\ell}}\operatorname{sgn}(\theta)(\alpha\otimes\beta)(\xi_{\theta(1)},\dots,\xi_{\theta(k+\ell)})\\
&= \frac{1}{k!\ell!}\sum_{\pi\in S(k,\ell)}\sum_{\lambda\in\mathfrak{S}_k}\sum_{\mu\in\mathfrak{S}_\ell}\operatorname{sgn}(\pi\circ(\lambda\boxplus\mu))\alpha(\xi_{\pi(\lambda(1))},\dots,\xi_{\pi(\lambda(k))})\beta(\xi_{\pi(k+\mu(1))},\dots,\xi_{\pi(k+\mu(\ell))})\\
&= \frac{1}{k!\ell!}\sum_{\pi\in S(k,\ell)}\sum_{\lambda\in\mathfrak{S}_k}\sum_{\mu\in\mathfrak{S}_\ell}\operatorname{sgn}(\pi)\cancel{\operatorname{sgn}(\lambda\boxplus\mu)\operatorname{sgn}(\lambda)}\alpha(\xi_{\pi(1)},\dots,\xi_{\pi(k)})\cancel{\operatorname{sgn}(\mu)}\beta(\xi_{\pi(k+1)},\dots,\xi_{\pi(k+\ell)})\\
&= \sum_{\pi\in S(k,\ell)}\operatorname{sgn}(\pi)\alpha(\xi_{\pi(1)},\dots,\xi_{\pi(k)})\beta(\xi_{\pi(k+1)},\dots,\xi_{\pi(k+\ell)})\\
&= \sum_{\pi\in S(k,\ell)}\operatorname{sgn}(\pi)\alpha^\xi_{\pi(1),\dots,\pi(k)}\beta^\xi_{\pi(k+1),\dots,\pi(k+\ell)}.
\end{aligned}
$$

这也给出了 $\alpha\wedge\beta=\sum_{\pi\in S(k,\ell)}\operatorname{sgn}(\pi)\,({}_\pi(\alpha\otimes\beta))$. ////

习题 6.2. *设 (M,g) 是光滑 Riemann 流形. 取定覆盖 $p\in M$ 的图卡 (U,x), 设 g 的坐标表示 (g_{ij}) 作为矩阵有逆 (g^{ij}). 考虑 $\bigwedge^k T_p^*M$ 上的对称双线性函数 $\rho_g^k(\alpha,\beta)=g^{i_1,j_1}\cdots g^{i_k,j_k}\alpha_{i_1,\dots,i_k}\beta_{j_1,\dots,j_k}$.*

(a) 证明 ρ_g^k 是 $\bigwedge^k T_p^*M$ 上定义良好的内积, 即 ρ_g^k 不依赖图卡的选择并且正定.

(b) 设 $\xi_1,\dots,\xi_n$ 是 T_pM 的标准正交基, 证明其对偶基 $\omega^1,\dots,\omega^n$ 是 (T_p^*M,ρ_g^1) 的标准正交基.

(c) 利用 (b) 写出 $(\bigwedge^k T_p^*M,\rho_g^k)$ 的一组标准正交基.

注. 硬算想必可行, 未若音乐同构 (musical isomorphism) 之升降指标.

证明. 定义 $\flat: v\in T_pM\mapsto v^\flat=g|_p(v,\bullet)\in T_p^*M$ 和 $\sharp=\flat^{-1}:\theta\in T_p^*M\mapsto\theta^\sharp\in T_pM$, 易见它们的坐标表示为 $(v^i\frac{\partial}{\partial x^i})^\flat=g_{ij}v^i\mathrm{d}x^j$ 和 $(\theta_i\mathrm{d}x^i)^\sharp=g^{ij}\theta_i\frac{\partial}{\partial x^j}$. 可以将此推广为线性同构 $(T_pM)^{\otimes k}\underset{\sharp}{\overset{\flat}{\rightleftharpoons}}(T_p^*M)^{\otimes k}$, 适合 $(v_1\otimes\cdots\otimes v_k)^\flat=v_1^\flat\otimes\cdots\otimes v_k^\flat$ 和 $(\theta^1\otimes\cdots\otimes\theta^k)^\sharp=(\theta^1)^\sharp\otimes\cdots\otimes(\theta^k)^\sharp$. 我们在 T_p^*M 上定义对称双线性函数 $\sharp g|_p(\theta,\phi)=g|_p(\theta^\sharp,\phi^\sharp)$, 易见 $\sharp g$ 有坐标表示 (g^{ij}), 从而是内积. 进一步地, 可在 $(T_p^*M)^{\otimes k}$ 上定义对称双线性函数 $\sharp g^{\otimes k}|_p$, 适合 $\sharp g^{\otimes k}|_p(\theta^1\otimes\cdots\otimes\theta^k,\phi^1\otimes\cdots\otimes\phi^k)=\sharp g|_p(\theta^1,\phi^1)\cdots\sharp g|_p(\theta^k,\phi^k)$, 易见 $\sharp g^{\otimes k}$ 有坐标表示 $(g^{i_1,j_1}\cdots g^{i_k,j_k})$. 由于 Kronecker 积保正定, $\sharp g^{\otimes k}|_p$ 是 $(T_p^*M)^{\otimes k}$ 上的内积.

(a) 只需注意到 ρ_g^k 是 $\sharp g^{\otimes k}|_p$ 在 $\bigwedge^k T_p^*M$ 上的限制.

(b) 不难发现 $\omega^i=(\xi_i)^\flat$, 因此 $\rho_g^1(\omega^i,\omega^j)=\sharp g|_p(\omega^i,\omega^j)=g|_p((\omega^i)^\sharp,(\omega^j)^\sharp)=g|_p(\xi_i,\xi_j)=\delta_{ij}$.

(c) 断言 $\{\frac{1}{\sqrt{k!}}\omega^{i_1}\wedge\cdots\wedge\omega^{i_k}\}_{i_1<\cdots<i_k}$ 即为所求. 事实上,

$$\begin{aligned}
&\rho_g^k(\omega^{i_1}\wedge\cdots\wedge\omega^{i_k},\omega^{j_1}\wedge\cdots\wedge\omega^{j_k})\\
&={}^\sharp g^{\otimes k}\big|_p\Big(\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_k}\operatorname{sgn}(\sigma)\,\omega^{i_{\sigma(1)}}\otimes\cdots\otimes\omega^{i_{\sigma(k)}},\sum_{\tau\in\mathfrak{S}_k}\operatorname{sgn}(\tau)\,\omega^{j_{\tau(1)}}\otimes\cdots\otimes\omega^{j_{\tau(k)}}\Big)\\
&=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_k}\sum_{\tau\in\mathfrak{S}_k}\operatorname{sgn}(\sigma)\operatorname{sgn}(\tau)\,\delta_{i_{\sigma(1)},j_{\tau(1)}}\cdots\delta_{i_{\sigma(k)},j_{\tau(k)}}\\
&=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_k}\sum_{\tau\in\mathfrak{S}_k}\operatorname{sgn}(\sigma^{-1})\operatorname{sgn}(\tau)\,\delta_{i_1,j_{\tau(\sigma^{-1}(1))}}\cdots\delta_{i_k,j_{\tau(\sigma^{-1}(k))}}\\
&=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_k}\sum_{\pi\in\mathfrak{S}_k}\operatorname{sgn}(\pi)\,\delta_{i_1,j_{\pi(1)}}\cdots\delta_{i_k,j_{\pi(k)}}\\
&=k!\,\delta_{i_1,j_1}\cdots\delta_{i_k,j_k},
\end{aligned}$$

其中用到 π 只能取恒同映射, 因为 $i_1<\cdots<i_k$ 且 $j_1<\cdots<j_k$. ■

习题 6.3. *考虑旋转单叶双曲面 $M=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:x^2+y^2-z^2=1\}$, 通过 $\mathbb{R}^3$ 的标准内积诱导 Riemann 度量. 写出 M 上的面积形式的一个具体表达式.* (One-Sheeted Hyperboloid in Wolfram|Alpha)

解. 表 $x=\sqrt{1+z^2}\cos\theta$, $y=\sqrt{1+z^2}\sin\theta$, $z=z$, 则有 $\frac{\partial}{\partial\theta}=(-\sqrt{1+z^2}\sin\theta,\sqrt{1+z^2}\cos\theta,0)$ 和 $\frac{\partial}{\partial z}=(\frac{z\cos\theta}{\sqrt{1+z^2}},\frac{z\sin\theta}{\sqrt{1+z^2}},1)$. 经计算可知, $\xi_1=\frac{1}{\sqrt{1+z^2}}\frac{\partial}{\partial\theta}$ 和 $\xi_2=\frac{\sqrt{1+z^2}}{\sqrt{1+2z^2}}\frac{\partial}{\partial z}$ 构成正交标架场, 其对偶余标架场为 $\omega^1=\sqrt{1+z^2}\,\mathrm{d}\theta$ 和 $\omega^2=\frac{\sqrt{1+2z^2}}{\sqrt{1+z^2}}\,\mathrm{d}z$. 于是, $\omega^1\wedge\omega^2=\sqrt{1+2z^2}\,\mathrm{d}\theta\wedge\mathrm{d}z$ 即为所求. ////

7 微分形式的运算 (2021 年 4 月 7 日 +14 日)

定义 7.1 (外微分)**.** 映射 $\mathrm{d}:\sum_{i_1<\cdots<i_k}\omega_{i_1,\dots,i_k}\mathrm{d}x^{i_1,\dots,i_k}\in\Omega^k\mapsto\sum_{i_1<\cdots<i_k}(\mathrm{d}\omega_{i_1,\dots,i_k})\wedge\mathrm{d}x^{i_1,\dots,i_k}\in\Omega^{k+1}$ 称为**外微分**运算. 外微分不依赖图卡的选择, 是良定义的.

注 7.2. 函数 $f\in C^\infty=\Omega^0$ 的全微分 $\mathrm{d}f=\frac{\partial f}{\partial x^i}\mathrm{d}x^i\in\Omega^1$ 见定义3.8, 梯度 $\operatorname{grad}f=(\mathrm{d}f)^\sharp=g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^j}$ 是切向量场, 其中 (g^{ij}) 是 Riemann 度量 (g_{ij}) 的逆矩阵 (于 $\mathbb{R}^n$ 而言是单位矩阵 I_n).

命题 7.3. *若 $\omega=\sum_{i_1<\cdots<i_k}\omega_{i_1,\dots,i_k}\mathrm{d}x^{i_1,\dots,i_k}$, 则 $\mathrm{d}\omega=\sum_{j_1<\cdots<j_{k+1}}\sum_{\ell=1}^{k+1}(-1)^{\ell-1}\frac{\partial\omega_{\dots,j_{\ell-1},j_{\ell+1},\dots}}{\partial x^{j_\ell}}\mathrm{d}x^{j_1,\dots,j_{k+1}}$.*

注 7.4. 设 $F=(F_x,F_y,F_z)$ 是 $\mathbb{R}^3$ 上的光滑切向量场, 则其旋度 $\nabla\times F=\det\begin{pmatrix}\partial_x & F_x & \frac{\partial}{\partial x}\\ \partial_y & F_y & \frac{\partial}{\partial y}\\ \partial_z & F_z & \frac{\partial}{\partial z}\end{pmatrix}$ 与 $\mathrm{d}(F^\flat)=\mathrm{d}(F_x\mathrm{d}x+F_y\mathrm{d}y+F_z\mathrm{d}z)\in\Omega^2(\mathbb{R}^3)=\operatorname{span}(\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y)$ 系数相同.

注 7.5. 设 $G=(G_x,G_y,G_z)$ 是 $\mathbb{R}^3$ 上的光滑切向量场, 则其散度 $\nabla\cdot G=\frac{\partial G_x}{\partial x}+\frac{\partial G_y}{\partial y}+\frac{\partial G_z}{\partial z}$ 恰好就是 $\mathrm{d}(G_x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+G_y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+G_z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y)\in\Omega^3(\mathbb{R}^3)=\operatorname{span}(\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z)$ 的系数.

命题 7.6. *外微分满足以下性质:*

- (线性) $\mathrm{d}(a\omega+b\theta)=a\,\mathrm{d}\omega+b\,\mathrm{d}\theta$, $\forall a,b\in\mathbb{R}$, $\forall\omega,\theta\in\Omega^k(M)$
- (斜 Leibniz 法则) $\mathrm{d}(\omega\wedge\theta)=(\mathrm{d}\omega)\wedge\theta+(-1)^k\omega\wedge(\mathrm{d}\theta)$, $\forall\omega\in\Omega^k(M)$, $\theta\in\Omega^\ell(M)$
- (Poincaré 引理) $\mathrm{d}\circ\mathrm{d}=0$, 即 $\mathrm{d}(\mathrm{d}\omega)=0\in\Omega^{k+2}(M)$, $\forall\omega\in\Omega^k(M)$
- (与 Lie 导数交换) $L_\xi(\mathrm{d}\omega)=\mathrm{d}(L_\xi\omega)$, $\forall\omega\in\Omega^k(M)$, $\forall\xi\in\Gamma(TM)$

- (自然性) $f^*(\mathrm{d}\omega)=\mathrm{d}(f^*(\omega)),\ \forall\omega\in\Omega^k(M),\ \forall f:N\to M$

习题 7.1. 通过坐标变换的计算，验证外微分的定义与图卡的选择无关.

证明. 任取 k-形式 ω, 记 $\omega^x_{i_1,\dots,i_k}=\omega(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}},\dots,\frac{\partial}{\partial x^{i_k}})$ 和 $\omega^y_{j_1,\dots,j_k}=\omega(\frac{\partial}{\partial y^{j_1}},\dots,\frac{\partial}{\partial y^{j_k}})$, 其中 x 和 y 是任意坐标映射, 则 $\omega^y_{j_1,\dots,j_k}=\frac{\partial x^{i_1}}{\partial y^{j_1}}\cdots\frac{\partial x^{i_k}}{\partial y^{j_k}}\omega^x_{i_1,\dots,i_k}$. 令 $\frac{\partial x^{i\setminus\ell}}{\partial y^{j\setminus\ell}}=\frac{\partial x^{i_1}}{\partial y^{j_1}}\cdots\frac{\partial x^{i_{\ell-1}}}{\partial y^{j_{\ell-1}}}\frac{\partial x^{i_{\ell+1}}}{\partial y^{j_{\ell+1}}}\cdots\frac{\partial x^{i_k}}{\partial y^{j_k}}$, 我们有

$$
\begin{aligned}
&\sum\nolimits_{j_1<\cdots<j_k}(\mathrm{d}\omega^y_{j_1,\dots,j_k})\wedge\mathrm{d}y^{j_1,\dots,j_k}=\frac{1}{k!}(\mathrm{d}\omega^y_{j_1,\dots,j_k})\wedge\mathrm{d}y^{j_1,\dots,j_k}\\
&=\frac{1}{k!}\left(\frac{\partial x^{i_1}}{\partial y^{j_1}}\cdots\frac{\partial x^{i_k}}{\partial y^{j_k}}\mathrm{d}\omega^x_{i_1,\dots,i_k}+\omega^x_{i_1,\dots,i_k}\sum_\ell\frac{\partial x^{i\setminus\ell}}{\partial y^{j\setminus\ell}}\mathrm{d}\left(\frac{\partial x^{i_\ell}}{\partial y^{j_\ell}}\right)\right)\wedge\mathrm{d}y^{j_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}y^{j_k}\\
&=\frac{1}{k!}(\mathrm{d}\omega^x_{i_1,\dots,i_k})\wedge\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_k}+\frac{1}{k!}\omega^x_{i_1,\dots,i_k}\sum_\ell\frac{\partial x^{i\setminus\ell}}{\partial y^{j\setminus\ell}}\left(\frac{\partial}{\partial y^\lambda}\frac{\partial x^{i_\ell}}{\partial y^{j_\ell}}\right)\mathrm{d}y^\lambda\wedge\mathrm{d}y^{j_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}y^{j_k}\\
&=\frac{1}{k!}(\mathrm{d}\omega^x_{i_1,\dots,i_k})\wedge\mathrm{d}x^{i_1,\dots,i_k}+\frac{1}{k!}\omega^x_{i_1,\dots,i_k}\underbrace{\sum_\ell\frac{\partial x^{i\setminus\ell}}{\partial y^{j\setminus\ell}}\frac{\partial^2x^{i_\ell}}{\partial y^\lambda\partial y^\mu}\mathrm{d}y^\lambda\wedge\mathrm{d}y^{j_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}y^{j_{\ell-1}}\wedge\mathrm{d}y^\mu\wedge\mathrm{d}y^{j_{\ell+1}}\cdots\wedge\mathrm{d}y^{j_k}}_{=0}\\
&=\sum\nolimits_{i_1<\cdots<i_k}(\mathrm{d}\omega^x_{i_1,\dots,i_k})\wedge\mathrm{d}x^{i_1,\dots,i_k},
\end{aligned}
$$

其中用到了 $\frac{\partial^2x^{i_\ell}}{\partial y^\lambda\partial y^\mu}=\frac{\partial^2x^{i_\ell}}{\partial y^\mu\partial y^\lambda}$ 和 $\mathrm{d}y^\lambda\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}y^\mu\wedge\cdots=-\mathrm{d}y^\mu\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}y^\lambda\wedge\cdots$. ■

习题 7.2. 验证外微分运算满足斜 *Leibniz* 法则 $\mathrm{d}(\alpha\wedge\beta)=(\mathrm{d}\alpha)\wedge\beta+(-1)^{\deg\alpha}\alpha\wedge(\mathrm{d}\beta)$, 其中 $\deg\alpha$ 是微分形式 α 的阶数.

证明. 设 $\alpha=\frac{1}{k!}\alpha_{i_1,\dots,i_k}\mathrm{d}x^{i_1,\dots,i_k}$ 和 $\beta=\frac{1}{\ell!}\beta_{j_1,\dots,j_\ell}\mathrm{d}x^{j_1,\dots,j_\ell}$, 则 $\alpha\wedge\beta=\frac{1}{k!\ell!}\alpha_{i_1,\dots,i_k}\beta_{j_1,\dots,j_\ell}\,\mathrm{d}x^{i_1,\dots,i_k,j_1,\dots,j_\ell}$. 于是 $\mathrm{d}(\alpha\wedge\beta)=\frac{1}{k!\ell!}(\frac{\partial\alpha_{i_1,\dots,i_k}}{\partial x^\lambda}\beta_{j_1,\dots,j_\ell}+\alpha_{i_1,\dots,i_k}\frac{\partial\beta_{j_1,\dots,j_\ell}}{\partial x^\lambda})\,\mathrm{d}x^{\lambda,i_1,\dots,i_k,j_1,\dots,j_\ell}=(\mathrm{d}\alpha)\wedge\beta+(-1)^k\alpha\wedge(\mathrm{d}\beta)$, 其中用到 $\mathrm{d}x^{i_1,\dots,i_k,\lambda,j_1,\dots,j_\ell}=(-1)^k\mathrm{d}x^{\lambda,i_1,\dots,i_k,j_1,\dots,j_\ell}$. ■

习题 7.3. 在一般的 *Riemann* 流形 (M,g) 上, 我们知道可以把全微分 $\mathrm{d}f\in\Omega^1(M)$ 升指标得到梯度 $\operatorname{grad}f\in\Gamma(TM)$. 推广 7.5, 给出散度算符 $\operatorname{div}:\Gamma(TM)\to\Omega^0(M)$ 的定义.

解. 设 M 可定向, 取体积形式 $V=|g|^{\frac12}\,\mathrm{d}x^{1,\cdots,n}$, 其中 $|g|=\det(g(\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}))$. 对 $\xi=\xi^i\frac{\partial}{\partial x^i}\in\Gamma(TM)$, 考察 $\iota_\xi V=\mathrm{C}^1_1(\xi\otimes V)=V(\xi,\cdots)=\sum_{i=1}^n(-1)^{i-1}\xi^i|g|^{\frac12}\,\mathrm{d}x^{1,\cdots,i-1,i+1,\cdots,n}$, 作用一次外微分可得 $\mathrm{d}(\iota_\xi V)=\frac{\partial}{\partial x^i}(\xi^i|g|^{\frac12})\,\mathrm{d}x^{1,\cdots,n}=|g|^{-\frac12}\frac{\partial}{\partial x^i}(\xi^i|g|^{\frac12})\,V$. 由此, 置 $\operatorname{div}\xi=|g|^{-\frac12}\frac{\partial}{\partial x^i}(\xi^i|g|^{\frac12})$. ////

注. $\operatorname{div}=\star\mathrm{d}\star\flat$, 其中 $\star$ 是 **Hodge 星算子**, 参看 https://handwiki.org/wiki/Hodge_star_operator

命题 7.7 (Cartan 公式)**.** 设 ω 是 k-形式, $\xi_1,\dots,\xi_{k+1}$ 是切向量场, 则

$$
\begin{aligned}
\langle\mathrm{d}\omega,\xi_1,\dots,\xi_{k+1}\rangle=&\sum_{\ell=1}^{k+1}(-1)^{\ell-1}\partial_{\xi_\ell}\langle\omega,\xi_1,\dots,\xi_{\ell-1},\xi_{\ell+1},\dots,\xi_{k+1}\rangle\\
&+\sum_{1\le i<j\le k+1}(-1)^{i+j}\langle\omega,[\xi_i,\xi_j],\xi_1,\dots,\xi_{i-1},\xi_{i+1},\dots,\xi_{j-1},\xi_{j+1},\dots,\xi_{k+1}\rangle
\end{aligned}
$$

注 7.8. 对于 1-形式 α 以及切向量场 ξ 和 η, 有 $\langle\mathrm{d}\alpha,\xi,\eta\rangle=\partial_\xi\langle\alpha,\eta\rangle-\partial_\eta\langle\alpha,\xi\rangle-\langle\alpha,[\xi,\eta]\rangle$.

定理 7.9 (活动标架引理)**.** 设 $(\xi_1,\dots,\xi_n)$ 是标架场, $(\omega^1,\dots,\omega^n)$ 是对偶的余标架场, 即 $\langle\omega^i,\xi_j\rangle=\delta^i_j$. 记 $[\xi_i,\xi_j]=C^k_{ij}\xi_k$, 其中 C^k_{ij} 称为**结构系数**, 则 $\mathrm{d}\omega^k=-\sum_{i<j}C^k_{ij}\omega^i\wedge\omega^j$.

推论 7.10. 任给局部定义的线性无关的光滑余切向量场 $\omega^1,\dots,\omega^k$, 存在图卡 (U,x) 使 $\omega^i=\mathrm{d}x^i\ (\forall i)$ 当且仅当 $\mathrm{d}\omega^i=0\ (\forall i)$.

证明. 只需充分性. 取图卡 (V,y), 存在 $\omega^{k+1}=\mathrm{d}y^{i_{k+1}},\dots,\omega^n=\mathrm{d}y^{i_n}$ 使得 $(\omega^1,\dots,\omega^n)$ 是余标架场. 令 $(\xi_1,\dots,\xi_n)$ 是对偶的标架场, 由活动标架引理可知, $\mathrm{d}\omega^i=0\ (\forall i)$ 蕴涵 $[\xi_i,\xi_j]=0\ (\forall i,j)$. 引理3.3表明, 存在图卡 (U,x) 使 $\xi_i=\frac{\partial}{\partial x^i}\ (\forall i)$, 于是 $\omega^i=\mathrm{d}x^i\ (\forall i)$. □

定理 7.11 (Frobenius). *任给 n 维流形上局部定义的线性无关的光滑余切向量场 $\omega^{k+1},\omega^{k+2},\dots,\omega^n$, 存在 k 维浸入子流形 N 使* ***Pfaff* 方程** *$\omega^\ell|_{TN}=0\ (\forall\ell)$ 成立当且仅当存在 $(n-k)^2$ 个光滑余切向量场 θ_i^ℓ 使得 $\mathrm{d}\omega^\ell=\theta_i^\ell\wedge\omega^i\ (\forall\ell)$.* (Prop. 19.8 in Lee's Introduction to Smooth Manifolds)

注 7.12. 这里 N 称为 $(\omega^{k+1},\omega^{k+2},\dots,\omega^n)$ 的**完全积分子流形**.

定义 7.13 (内乘). 设 ω 是 k-形式, ξ 是切向量场. 通过 $\langle\iota_\xi(\omega),\eta_1,\dots,\eta_{k-1}\rangle=\langle\omega,\xi,\eta_1,\dots,\eta_{k-1}\rangle$ 定义 $(k-1)$-形式 $\iota_\xi(\omega)$, 称为 ω 受 ξ 的**内乘**. 约定 $\iota_\xi(f)=0$, 其中 f 是任意函数 (0-形式).

命题 7.14. *内乘 ι_ξ 是线性映射, 满足斜 Leibniz 法则 $\iota_\xi(\alpha\wedge\beta)=\iota_\xi(\alpha)\wedge\beta+(-1)^{\deg\alpha}\alpha\wedge\iota_\xi(\beta)$.*

定理 7.15 (Cartan 魔术公式). $L_\xi=\iota_\xi\circ\mathrm{d}+\mathrm{d}\circ\iota_\xi$.

习题 7.4. *设 $\omega=\omega_i\mathrm{d}x^i$ 是流形 M 上的 1-形式, 并且在 $p\in M$ 附近处处非零. 用坐标分量按照 Frobenius 定理写出存在经过 p 的 (ω) 的积分子流形的充要条件.*

解. 所求条件为存在 1-形式 $\theta=\theta_i\mathrm{d}x^i$ 使得 $\mathrm{d}\omega=\theta\wedge\omega$. 计算可得 $\mathrm{d}\omega=\frac{\partial\omega_i}{\partial x^j}\,\mathrm{d}x^{ji}$ 和 $\theta\wedge\omega=\theta_j\omega_i\,\mathrm{d}x^{ji}$, 二者相等当且仅当 $\frac{\partial\omega_i}{\partial x^j}-\frac{\partial\omega_j}{\partial x^i}=\theta_j\omega_i-\theta_i\omega_j\ (\forall i,j)$. ////

习题 7.5. *证明 $\iota_{[\xi,\eta]}=L_\xi\circ\iota_\eta-\iota_\eta\circ L_\xi$, 其中 ξ 和 η 是光滑向量场.*

证明. 任取 $\omega=\omega_{i_1,\dots,i_k}\,\mathrm{d}x^{i_1}\otimes\cdots\otimes\mathrm{d}x^{i_k}$. 记 $\xi=\xi^i\frac{\partial}{\partial x^i}$ 和 $\eta=\eta^i\frac{\partial}{\partial x^i}$, 则 $[\xi,\eta]=(\xi^i\frac{\partial\eta^j}{\partial x^i}-\eta^i\frac{\partial\xi^j}{\partial x^i})\frac{\partial}{\partial x^j}$, 进而 $\iota_{[\xi,\eta]}(\omega)=(\xi^i\frac{\partial\eta^j}{\partial x^i}-\eta^i\frac{\partial\xi^j}{\partial x^i})\omega_{j,i_2,\dots,i_k}\,\mathrm{d}x^{i_2}\otimes\cdots\otimes\mathrm{d}x^{i_k}$. 对于 $\iota_\eta(\omega)=\eta^j\omega_{j,i_2,\dots,i_k}\,\mathrm{d}x^{i_2}\otimes\cdots\otimes\mathrm{d}x^{i_k}$, 有 $L_\xi(\iota_\eta(\omega))=(\xi^i\frac{\partial(\eta^j\omega_{j,i_2,\dots,i_k})}{\partial x^i}+\sum_{\ell>1}\eta^j\omega_{j,i_2,\dots,i_{\ell-1},\lambda,i_{\ell+1},\dots,i_k}\frac{\partial\xi^\lambda}{\partial x^{i_\ell}})\,\mathrm{d}x^{i_2}\otimes\cdots\otimes\mathrm{d}x^{i_k}$. 另一方面, 对于 $L_\xi(\omega)=(\xi^i\frac{\partial\omega_{i_1,\dots,i_k}}{\partial x^i}+\sum_{\ell\geq1}\omega_{i_1,\dots,i_{\ell-1},\lambda,i_{\ell+1},\dots,i_k}\frac{\partial\xi^\lambda}{\partial x^{i_\ell}})\,\mathrm{d}x^{i_1}\otimes\cdots\otimes\mathrm{d}x^{i_k}$, 有 $\iota_\eta(L_\xi(\omega))=(\xi^i\eta^j\frac{\partial\omega_{j,i_2,\dots,i_k}}{\partial x^i}+\eta^j\omega_{\lambda,i_2,\dots,i_k}\frac{\partial\xi^\lambda}{\partial x^j}+\sum_{\ell>1}\eta^j\omega_{j,i_2,\dots,i_{\ell-1},\lambda,i_{\ell+1},\dots,i_k}\frac{\partial\xi^\lambda}{\partial x^{i_\ell}})\,\mathrm{d}x^{i_2}\otimes\cdots\otimes\mathrm{d}x^{i_k}$. 故 $L_\xi(\iota_\eta(\omega))-\iota_\eta(L_\xi(\omega))=\iota_{[\xi,\eta]}(\omega)$. 注意 ω 可以推广为一般的协变张量场, 并不需要交错. ■

8 Lie 群和 Lie 代数 (2021 年 4 月 14 日)

定义 8.1 (Lie 群). 设 G 是光滑流形, 配备光滑的乘法和求逆运算构成群, 此时 G 称为 **Lie 群**.

注 8.2. 如果 Lie 群 G 的成员都是可逆矩阵, 则 G 称为*古典 Lie 群*.

常见的例子有: 一般线性群 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, 特殊线性群 $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$, 正交群 O_n, 特殊正交群 SO_n, 以及 Heisenberg 群 $H^3=\{$对角元都为 1 的 3 阶上三角方阵$\}$. ⌕ 回顾习题1.3.

定义 8.3 (平移和共轭). 设 G 是 Lie 群, 任取 $g\in G$. 定义 $\ell_g:x\in G\mapsto gx\in G$, 称为**左乘变换**. 定义 $r_g:x\in G\mapsto xg\in G$, 称为**右乘变换**. 定义 $i_g:x\in G\mapsto gxg^{-1}\in G$, 称为**共轭变换**, 又称为*内自同构*.

定义 8.4 (Lie 群同态/同构). 设 Lie 群之间的光滑映射 $f:G\to H$ 是群同态/同构, 则称 f 是 **Lie 群同态/同构**. 根据反函数定理, Lie 群同构必为光滑同胚.

命题 8.5. *Lie 群同态的秩为常数. 单的 Lie 群同态必为浸入. 满的 Lie 群同态必为淹没.*

定义 8.6 (子 Lie 群). 设 G 和 H 均为 Lie 群. 若 $f:G\to H$ (默认为含入映射) 是 Lie 群单同态, 则称 $f(G)$ 是 H 的**子 Lie 群**. 进一步地, 若 f 是嵌入, 则称 $f(G)$ 是 H 的**正则子 Lie 群**.

定义 8.7 (左不变张量场). 设 T 是 Lie 群 G 上的协变张量场, 若 $(\ell_g)^*(T|_{gx}) = T|_x$ $(\forall g, x \in G)$, 则称 T 是**左不变**协变张量场. 设 T 是 Lie 群 G 上的反变张量场, 若 $(\ell_g)_*(T|_x) = T|_{gx}$ $(\forall g, x \in G)$, 则称 T 是**左不变**反变张量场.

定义 8.8 (Killing 度量). Lie 群上的左不变 Riemann 度量称为 **Killing 度量**.

命题 8.9. *设 G 是 Lie 群, 则幺元处的切空间 T_1G 上的任意内积唯一决定了 G 上的 Killing 度量.*

定义 8.10 (Lie 括号和 Lie 代数). 设线性空间上的二元运算 $[\bullet, \bullet]$ 满足双线性、交错、Jacobi 恒等式, 则 $[\bullet, \bullet]$ 称为 **Lie 括号**. 配备 Lie 括号的线性空间称为 **Lie 代数**.

注 8.11. Lie 群的左不变向量场构成 Lie 代数, 其中 Lie 括号取为 Poisson 括号. 注意左不变向量场的 Lie 括号仍是左不变向量场, 这由 Lie 导数的自然性保证.

定义 8.12 (Lie 群的 Lie 代数). 设 G 是 Lie 群. 左不变切向量场 $\xi \in \Gamma(TG)$ 与切向量 $\xi|_1 \in T_1G$ 互相唯一决定, 从而给出 T_1G 上的 Lie 括号. 所得 $(T_1G, [\bullet, \bullet])$ 称为 G 的 **Lie 代数**, 记为 $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$.

习题 8.1. *设 G 是 n 维 Lie 群, (U, x) 是覆盖幺元 1 的图卡, 其中乘法和求逆的坐标表示分别为 $x(gh) = (\mu^1(x(g), x(h)), \ldots, \mu^n(x(g), x(h)))$ 和 $x(g^{-1}) = (\rho^1(x(g)), \ldots, \rho^n(x(g)))$, 并且 $x(1) = 0_n$.*

(a) 写出由 $\frac{\partial}{\partial x^i}|_1$ 决定的左不变切向量场 ξ_i 的局部坐标表达式.

(b) 求标架场 $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ 的所有结构常数 c_{ij}^k, 适合 $[\xi_i, \xi_j] = c_{ij}^k \xi_k$.

解. (a) 左乘变换 ℓ_g 的坐标表示为 $x \circ \ell_g \circ x^{-1}(y) = (\mu^1(x(g), y), \ldots, \mu^n(x(g), y))$, 相应的切映射 $(\ell_g)_* : T_1G \to T_gG$ 的坐标表示为 $(\frac{\partial \mu^i}{\partial y^j}|_{(x(g),0_n)})$, 于是 $\xi_j|_g = (\ell_g)_*(\frac{\partial}{\partial x^j}|_1) = \frac{\partial \mu^i}{\partial y^j}|_{(x(g),0_n)} \frac{\partial}{\partial x^i}|_g$.

(b) 我们有 $[\xi_i, \xi_j] = (\frac{\partial \mu^\beta}{\partial y^i} \frac{\partial^2 \mu^\alpha}{\partial x^\beta \partial y^j} - \frac{\partial \mu^\beta}{\partial y^j} \frac{\partial^2 \mu^\alpha}{\partial x^\beta \partial y^i}) \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$, 其中 $y = x(1) = 0_n$. 注意到 $\ell_1 = \mathrm{Id}_G$ 蕴涵 $(\ell_1)_* = \mathrm{Id}_{T_1G}$, 则由 $[\xi_i, \xi_j]|_1 = [\frac{\partial}{\partial x^i}|_1, \frac{\partial}{\partial x^j}|_1] = c_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k}|_1$ 可得 $c_{ij}^k = \frac{\partial^2 \mu^k}{\partial x^i \partial y^j}|_{(0_n,0_n)} - \frac{\partial^2 \mu^k}{\partial x^j \partial y^i}|_{(0_n,0_n)}$. ////

习题 8.2. *我们知道每个 n 维复流形 M 都可看作 $2n$ 维实流形, 因为每个复坐标系 $(z^1, \ldots, z^n)$ 都可看作实坐标系 $(\mathrm{Re}\, z^1, \mathrm{Im}\, z^1, \ldots, \mathrm{Re}\, z^n, \mathrm{Im}\, z^n)$. 两个复坐标系 (U, z) 和 (V, w) 光滑相容当且仅当坐标变换都是复解析的; 记 $\mathrm{Re}\, z^i = x^i$, $\mathrm{Im}\, z^i = y^i$, $\mathrm{Re}\, w^j = u^j$, $\mathrm{Im}\, w^j = v^j$, 则坐标变换 $(U, z) \rightsquigarrow (V, w)$ 复解析的条件即 Cauchy–Riemann 方程: $\frac{\partial u^j}{\partial x^i} = \frac{\partial v^j}{\partial y^i}$, $\frac{\partial v^j}{\partial x^i} = -\frac{\partial u^j}{\partial y^i}$. 复流形之间的复解析映射是指复坐标表示都复解析的映射; 对映射的复坐标表示 $h(z)$, 记 $\mathrm{Re}\, h^j(z) = f^j(z)$ 和 $\mathrm{Im}\, h^j(z) = g^j(z)$, 则映射 h 复解析的条件即 Cauchy–Riemann 方程: $\frac{\partial f^j}{\partial x^i} = \frac{\partial g^j}{\partial y^i}$, $\frac{\partial g^j}{\partial x^i} = -\frac{\partial f^j}{\partial y^i}$. 下面我们试着用一种比较 "几何" 的方式理解复切向量.*

*(a) 设 ζ 是从 $0 \in \mathbb{C}$ 的开邻域 U 到复流形 M 的复解析映射, 且 $\zeta(0) = p$, 则切映射 $\zeta_* : T_0\mathbb{C} \to T_pM$ 称为 p 处的一个**复切向量**, 记为 $\frac{\partial}{\partial \zeta}|_0$, 并称 ζ 是它的一个几何实现. 特别地, 设 M 上有复坐标系 (V, w) 覆盖 p, 则对 $\forall \lambda^1, \ldots, \lambda^n \in \mathbb{C}$, 可以定义一个 p 处的复切向量 $\lambda^j \frac{\partial}{\partial w^j}$, 使其有一个几何实现在 (V, w) 下复坐标表示为 $z \mapsto (w^j(p) + \lambda^j z)_{1 \le j \le n}$. 记 ζ 在 (V, w) 下复坐标表示为 $z \mapsto (\zeta^j(z))_{1 \le j \le n}$, 并且 $\mathrm{Re}\, \zeta^j(z) = \xi^j(x, y)$, $\mathrm{Im}\, \zeta^j(z) = \eta^j(x, y)$, 其中 $\mathrm{Re}\, z = x$, $\mathrm{Im}\, z = y$. 证明存在唯一的一组复系数 $\frac{\partial \zeta^j}{\partial z}|_0$ 使得 $\frac{\partial}{\partial \zeta}|_0 = \frac{\partial \zeta^j}{\partial z}|_0 \frac{\partial}{\partial w^j}$, 并用 ξ^j 和 η^j 的一阶偏导数写出 $\frac{\partial \zeta^j}{\partial z}|_0$ 的具体表达式.*

*(b) 复数域 $\mathbb{C}$ 作为复流形有标准复坐标系 $(\mathbb{C}, \varepsilon)$, 其中 $\varepsilon = \mathrm{Id}_{\mathbb{C}}$, 于是可以把 $\mathbb{C}$ 中的复切向量 $\lambda \frac{\partial}{\partial \varepsilon}|_0$ 等同于复数 λ. 任取 $p \in M$ 处的复切向量 X 及其几何实现 ζ, 任取 p 的开邻域 V 和复解析函数 $h : V \to \mathbb{C}$, 则可以得到 $h(p) \in \mathbb{C}$ 处的一个复切向量 $\frac{\partial}{\partial (h \circ \zeta)}|_0$, 其等同的复数称为 h 对 X 的**复方向导数**, 记为 $X(h) = \frac{\partial h}{\partial \zeta}|_0$. 对 h 的复坐标表示 $h(w)$, 记 $\mathrm{Re}\, h(w) = f(u^1, v^1, \ldots, u^n, v^n)$ 和 $\mathrm{Im}\, h(w) = g(u^1, v^1, \ldots, u^n, v^n)$, 用 f 和 g 的一阶偏导数写出 h 对 $\frac{\partial}{\partial w^i}$ 的复方向导数 $\frac{\partial h}{\partial w^i}$ 的具体表达式. 证明如果 $X = \lambda^j \frac{\partial}{\partial w^j}$, 则有 $X(h) = \lambda^j \frac{\partial h}{\partial w^j}$, 这与 X 的几何实现的选择无关.*

(c) 设 M 和 N 都是复流形, 映射 $F: M \to N$ 复解析. 任取 $p \in M$ 处的复切向量 X 及其几何实现 ζ, 可以得到 $F(p) \in N$ 处的复切向量 $F_*(X) = \frac{\partial}{\partial(F\circ\zeta)}|_0$, 由此定义的映射 $F_*: T_pM \to T_{F(p)}N$ 称为 p 处的**切映射**. 任取覆盖 p 的 M 图卡 (U,z) 和覆盖 $F(p)$ 的 N 图卡 (V,w), 证明如果 F 的坐标表示为 $(F^1(z),\dots,F^k(z))$, 则有 $F_*(\lambda^i\frac{\partial}{\partial z^i}) = \lambda^i\frac{\partial F^j}{\partial z^i}\frac{\partial}{\partial w^j}$.

证明. (a) 由于 $\zeta: (x,y) \mapsto (\xi^j(x,y), \eta^j(x,y))_{1\le j\le n}$ 复解析, ζ_* 有坐标表示 $(\frac{\partial \xi^j}{\partial x}, \frac{\partial \eta^j}{\partial x})_{1\le j\le n}$. 特别地, $\lambda^j\frac{\partial}{\partial w^j}$ 的坐标表示为 $(\operatorname{Re}\lambda^j, \operatorname{Im}\lambda^j)_{1\le j\le n}$. 综上, 可以唯一确定 $\frac{\partial \zeta^j}{\partial z}|_0 = \frac{\partial \xi^j}{\partial x}|_{(0,0)} + \sqrt{-1}\frac{\partial \eta^j}{\partial x}|_{(0,0)}$.

(b) 类似 (a), 我们有 $\frac{\partial}{\partial(h\circ\zeta)}|_0$ 的坐标表示 $(\frac{\partial(f\circ\zeta)}{\partial x}, \frac{\partial(g\circ\zeta)}{\partial x})$, 即得 $X(h) = \frac{\partial(f\circ\zeta)}{\partial x}|_{(0,0)} + \sqrt{-1}\frac{\partial(g\circ\zeta)}{\partial x}|_{(0,0)}$, 其中 $\frac{\partial(f\circ\zeta)}{\partial x}|_{(0,0)} = \frac{\partial f}{\partial u^j}|_p\frac{\partial \xi^j}{\partial x}|_{(0,0)} + \frac{\partial f}{\partial v^j}|_p\frac{\partial \eta^j}{\partial x}|_{(0,0)}$ 且 $\frac{\partial(g\circ\zeta)}{\partial x}|_{(0,0)} = \frac{\partial g}{\partial u^j}|_p\frac{\partial \xi^j}{\partial x}|_{(0,0)} + \frac{\partial g}{\partial v^j}|_p\frac{\partial \eta^j}{\partial x}|_{(0,0)}$. 特别地, $\frac{\partial h}{\partial w^i} = \frac{\partial f}{\partial u^i}|_p + \sqrt{-1}\frac{\partial g}{\partial u^i}|_p$. 若 $X = \lambda^j\frac{\partial}{\partial w^j}$, 则 $\frac{\partial \xi^j}{\partial x}|_{(0,0)} = \operatorname{Re}\lambda^j$ 且 $\frac{\partial \eta^j}{\partial x}|_{(0,0)} = \operatorname{Im}\lambda^j$, 代入验证即可.

(c) 原命题等价于 $F_*(\operatorname{Re}\lambda^i\frac{\partial}{\partial x^i} + \operatorname{Im}\lambda^i\frac{\partial}{\partial y^i}) = \operatorname{Re}(\lambda^i\frac{\partial F^j}{\partial z^i})\frac{\partial}{\partial u^j} + \operatorname{Im}(\lambda^i\frac{\partial F^j}{\partial z^i})\frac{\partial}{\partial v^j}$, 所以只需注意到 $F_*(\frac{\partial}{\partial x^i}) = \frac{\partial \operatorname{Re}F^j}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial u^j} + \frac{\partial \operatorname{Im}F^j}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial v^j}$, $F_*(\frac{\partial}{\partial y^i}) = \frac{\partial \operatorname{Re}F^j}{\partial y^i}\frac{\partial}{\partial u^j} + \frac{\partial \operatorname{Im}F^j}{\partial y^i}\frac{\partial}{\partial v^j} = -\frac{\partial \operatorname{Im}F^j}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial u^j} + \frac{\partial \operatorname{Re}F^j}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial v^j}$, 以及 $\lambda^i\frac{\partial F^j}{\partial z^i} = (\operatorname{Re}\lambda^i\frac{\partial \operatorname{Re}F^j}{\partial x^i} - \operatorname{Im}\lambda^i\frac{\partial \operatorname{Im}F^j}{\partial x^i}) + \sqrt{-1}(\operatorname{Re}\lambda^i\frac{\partial \operatorname{Im}F^j}{\partial x^i} + \operatorname{Im}\lambda^i\frac{\partial \operatorname{Re}F^j}{\partial x^i})$. ■

9 矩阵的 Lie 代数 (2021 年 4 月 21 日)

定义 9.1 (Lie 代数同态/同构). 设 $\mathfrak{g}$ 和 $\mathfrak{h}$ 是 Lie 代数, $\psi: \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ 是线性映射. 若对 $\forall \xi, \eta \in \mathfrak{g}$ 成立 $\psi[\xi,\eta] = [\psi\xi, \psi\eta]$, 则称 ψ 是 **Lie 代数同态**. 可逆的 Lie 代数同态称为 **Lie 代数同构**.

命题 9.2. *Lie 群同态的切映射是 Lie 代数同态.*

推论 9.3. *设 G 是 H 的子 Lie 群, 则 $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$ 是 $\mathfrak{h} = \mathrm{Lie}(H)$ 的子 Lie 代数.*

定义 9.4 (Lie 群表示). 设 V 是线性空间, 则 Lie 群同态 $\rho: G \to \mathrm{GL}(V)$ 称为 Lie 群 G 的**表示**, 其中 $\mathrm{GL}(V) = \mathrm{Aut}(V) = \{V\text{的线性自同构}\}$ 是一般线性群. 若 ρ 是单射, 则称 ρ 是**忠实**的.

定义 9.5 (Lie 代数表示). 设 V 是线性空间, 则 Lie 代数同态 $\psi: \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ 称为 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的**表示**, 其中 $\mathfrak{gl}(V) = \mathrm{Lie}(\mathrm{GL}(V)) = \mathrm{End}(V) = \{V\text{的线性自同态}\}$. 若 ψ 是单射, 则称 ψ 是**忠实**的.

定理 9.6 (Ado). *仿紧的 Lie 群必定有到某个 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ 的子 Lie 群的同态, 在每点附近都是局部同胚.*

有限维的 Lie 代数必定同构于某个 $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}) = \mathrm{Lie}(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}))$ 的子 Lie 代数.

命题 9.7. *一般线性群 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ 的 Lie 代数为 $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}) = M_{n\times n}(\mathbb{R})$, 配备 Lie 括号 $[A,B] = AB - BA$.*

证明. 注意到 $a^i_j\frac{\partial}{\partial x^i_j}|_{I_n}, b^i_j\frac{\partial}{\partial x^i_j}|_{I_n} \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$ 分别决定了左不变向量场 $x^i_k a^k_j\frac{\partial}{\partial x^i_j}, x^i_k b^k_j\frac{\partial}{\partial x^i_j} \in \Gamma(T\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}))$, 它们的 Lie 括号 $(x^\lambda_\nu a^\nu_\mu \frac{\partial x^i_k}{\partial x^\lambda_\mu} b^k_j - x^\lambda_\nu b^\nu_\mu \frac{\partial x^i_k}{\partial x^\lambda_\mu} a^k_j)\frac{\partial}{\partial x^i_j} = (x^i_\nu a^\nu_k b^k_j - x^i_\nu b^\nu_k a^k_j)\frac{\partial}{\partial x^i_j}$ 仍是左不变向量场, 在幺元 I_n 处实现为 $(a^i_k b^k_j - b^i_k a^k_j)\frac{\partial}{\partial x^i_j}|_{I_n}$. 综上, $[a^i_j\frac{\partial}{\partial x^i_j}|_{I_n}, b^i_j\frac{\partial}{\partial x^i_j}|_{I_n}] = (a^i_k b^k_j - b^i_k a^k_j)\frac{\partial}{\partial x^i_j}|_{I_n}$. □

注 9.8. $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) : \det(A) = 1\}$ 的 Lie 代数为 $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}) : \mathrm{tr}(A) = 0\}$.

$\mathrm{O}_n = \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) : A^\top A = I_n\}$ 的 Lie 代数为 $\mathfrak{o}_n = \{A \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}) : A^\top = -A\}$.

$\mathrm{SO}_n = \mathrm{O}_n \cap \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ 的 Lie 代数为 $\mathfrak{so}_n = \mathfrak{o}_n$.

辛群 $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R}) : A^\top J_{2n} A = J_{2n}\}$
辛 Lie 代数 $\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{R}) = \{A \in \mathfrak{gl}_{2n}(\mathbb{R}) : A^\top J_{2n} = -J_{2n}A\}$ 其中 $J_{2n} = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$.

Heisenberg 群 $H^3 = \left\{\begin{pmatrix} 1 & x^1 & x^3 \\ 0 & 1 & x^2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ 的 Lie 代数为 $\mathfrak{h}^3 = \left\{\begin{pmatrix} 0 & x^1 & x^3 \\ 0 & 0 & x^2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$.

习题 9.1. *将 $Z=(z^1,\dots,z^n)^\top\in\mathbb{C}^n$ 等同于 $Z_{\mathbb{R}}=(\operatorname{Re}z^1,\dots,\operatorname{Re}z^n,\operatorname{Im}z^1,\dots,\operatorname{Im}z^n)^\top\in\mathbb{R}^{2n}$, 则 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}\cong\mathbb{R}^{2n^2}$ 唯一对应于 $A_{\mathbb{R}}\in\mathbb{R}^{(2n)\times(2n)}$, 使得 $A_{\mathbb{R}}Z_{\mathbb{R}}=(AZ)_{\mathbb{R}}, \forall Z$.*

(a) 证明 $A_{\mathbb{R}}=\begin{pmatrix}\operatorname{Re}A & -\operatorname{Im}A\\ \operatorname{Im}A & \operatorname{Re}A\end{pmatrix}$, 并且当 A 可逆时必有 $A_{\mathbb{R}}$ 可逆.

(b) 证明 $G=\{A_{\mathbb{R}}:A\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})\}$ 构成 $\mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R})$ 的子 Lie 群, 其中 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})=\{n\times n$ 可逆复矩阵$\}$.

(c) 求 G 的 Lie 代数 $\mathfrak{g}$. 注意 $\mathfrak{g}$ 作为 $\mathfrak{gl}_{2n}(\mathbb{R})$ 的子 Lie 代数, 其 Lie 括号是已知的, 所以只需写出 $\xi\in\mathfrak{gl}_{2n}(\mathbb{R})$ 在 $\mathfrak{g}$ 里的判定条件.

证明. (a) 为看出 $A_{\mathbb{R}}$ 表达式, 只需 $(\operatorname{Re}A+\sqrt{-1}\operatorname{Im}A)(\operatorname{Re}Z+\sqrt{-1}\operatorname{Im}Z)=(\operatorname{Re}A\operatorname{Re}Z-\operatorname{Im}A\operatorname{Im}Z)+\sqrt{-1}(\operatorname{Im}A\operatorname{Re}Z+\operatorname{Re}A\operatorname{Im}Z)$. 而 $\ker(A)=\{Z\in\mathbb{C}^n:AZ=0\}$ 和 $\ker(A_{\mathbb{R}})=\{Z_{\mathbb{R}}\in\mathbb{R}^{2n}:A_{\mathbb{R}}Z_{\mathbb{R}}=0\}$ 之间存在一一对应, 所以 A 可逆当且仅当 $A_{\mathbb{R}}$ 可逆.

(b) 易见 $(AB)_{\mathbb{R}}=A_{\mathbb{R}}B_{\mathbb{R}}$, 因而 $\rho: A\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})\mapsto A_{\mathbb{R}}\in\mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R})$ 是 Lie 群单同态, 即知 $G=\rho(\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}))$ 是 $\mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R})$ 的子 Lie 群.

(c) 利用 Lie 代数同构 $\rho_*:\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})=\mathbb{C}^{n\times n}\to\mathfrak{g}\subset\mathfrak{gl}_{2n}(\mathbb{R})$, 可得 $\mathfrak{g}=\{A_{\mathbb{R}}:A\in\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})\}$, 其中 $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ 是 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ 的 Lie 代数. ■

习题 9.2. *在 $\mathbb{R}^4$ 上可以定义 Hamilton 四元数乘法, 即把 (x^1,x^2,x^3,x^4) 等同于 $x^1+x^2\mathbf{i}+x^3\mathbf{j}+x^4\mathbf{k}$, 并且规定一个双线性的乘法运算 $\times$, 适合*

	$\cdot\times\mathbf{i}$	$\cdot\times\mathbf{j}$	$\cdot\times\mathbf{k}$
$\mathbf{i}\times\cdot$	-1	$\mathbf{k}$	$-\mathbf{j}$
$\mathbf{j}\times\cdot$	$-\mathbf{k}$	-1	$\mathbf{i}$
$\mathbf{k}\times\cdot$	$\mathbf{j}$	$-\mathbf{i}$	-1

(a) 证明单位球面 $S^3\subset\mathbb{R}^4$ 按照上述乘法构成一个 Lie 群.

(b) 写出其 Lie 代数 $\mathfrak{s}^3$ 的一组基底及 Lie 括号的计算公式.

证明. (a) 在 $\mathbb{R}^4\setminus\{0_4\}$ 中, 乘法运算的坐标表示为 $x\times y=(\mu^1(x,y),\mu^2(x,y),\mu^3(x,y),\mu^4(x,y))$, 其中

$$\mu^1(x,y)=x^1y^1-x^2y^2-x^3y^3-x^4y^4,\quad \mu^2(x,y)=x^1y^2+x^2y^1+x^3y^4-x^4y^3,$$
$$\mu^3(x,y)=x^1y^3+x^3y^1+x^4y^2-x^2y^4,\quad \mu^4(x,y)=x^1y^4+x^4y^1+x^2y^3-x^3y^2.$$

于是幺元为 $1=(1,0,0,0)$, 求逆运算的坐标表示为 $x^{-1}=(x^1,-x^2,-x^3,-x^4)/\|x\|^2$. 易见乘法和求逆都光滑, 限制到 $S^3=\{x\in\mathbb{R}^4\setminus\{0_4\}:\|x\|^2=1\}$ 上仍然光滑且封闭, 从而使 S^3 成为 Lie 群. 事实上, 将 $x\in\mathbb{R}^4$ 等同于 $\begin{pmatrix}x^1+\sqrt{-1}x^2 & x^3+\sqrt{-1}x^4\\ -x^3+\sqrt{-1}x^4 & x^1-\sqrt{-1}x^2\end{pmatrix}$, 则 $S^3\cong\mathrm{SU}_2=\{g\in\mathrm{GL}_2(\mathbb{C}):g^\dagger g=I_2,\ \det(g)=1\}$.

(b) 我们有 $\mathfrak{s}^3\cong\mathfrak{su}_2=\{\eta\in\mathfrak{gl}_2(\mathbb{C}):\eta^\dagger=-\eta,\ \operatorname{tr}(\eta)=0\}$. 为了说明最后的等式, 注意到两端都是 $\mathbb{R}$ 上的 3 维线性空间, 从而只需检验包含关系. 任取流线 $g(t)=I_2+t\eta+o(t)$, 其中 $\eta\in\mathfrak{su}_2$, 则有 $0=g(t)^\dagger g(t)-I_2=t(\eta+\eta^\dagger)+o(t)$ 和 $1=\det(g(t))=1+t\operatorname{tr}(\eta)+o(t)$, 令 $t\to0$ 即知 $\eta^\dagger=-\eta$ 且 $\operatorname{tr}(\eta)=0$. 接下来, 不难找出一组 $\mathfrak{su}_2$ 的基: $\eta_1=\begin{pmatrix}\sqrt{-1} & 0\\ 0 & -\sqrt{-1}\end{pmatrix}$, $\eta_2=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$, $\eta_3=\begin{pmatrix}0 & \sqrt{-1}\\ \sqrt{-1} & 0\end{pmatrix}$. 由于 Lie 括号是双线性运算, 结构常数足以给出全部信息; 换言之, $[\eta_i,\eta_j]=c_{ij}^k\eta_k$ 中的 c_{ij}^k 即为所求. 经计算, 非零的结构常数为 $c_{12}^3=c_{23}^1=c_{31}^2=2$ 和 $c_{21}^3=c_{13}^2=c_{32}^1=-2$. ■

习题 9.3. *考虑 Heisenberg 群 $H^3=\{$对角元都为 1 的 3×3 上三角实矩阵$\}=\left\{\begin{pmatrix}1 & x^1 & x^3\\ 0 & 1 & x^2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right\}$.*

(a) 写出其 Lie 代数 $\mathfrak{h}^3$ 的一组基底及相应的结构常数.

(b) 如果有的话, 具体写出一个 $\mathfrak{h}^3$ 和 $\mathfrak{s}^3$ 的 Lie 代数同构, 否则证明二者作为 Lie 代数不同构.

解. (a) 利用习题8.1. 对于 H^3, 有 $\mu^1(x,y)=x^1+y^1$, $\mu^2(x,y)=x^2+y^2$, $\mu^3(x,y)=x^1y^2+x^3+y^3$. 取

$\mathfrak{h}^3$ 的基底 $\{\frac{\partial}{\partial x^i}|_{I_3}\}_{1\le i\le 3}$, 则相应的左不变向量场为 $\xi_1=\frac{\partial}{\partial x^1}$, $\xi_2=\frac{\partial}{\partial x^2}+x^1\frac{\partial}{\partial x^3}$, $\xi_3=\frac{\partial}{\partial x^3}$, 而结构常数除了 $c_{12}^3=-c_{21}^3=1$ 之外都是 0.

(b) 断言 $\mathfrak{h}^3\ncong\mathfrak{s}^3$. 对于 Lie 代数 $\mathfrak{g}$, 定义 $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]=\mathrm{span}(\{[\xi,\eta]:\xi,\eta\in\mathfrak{g}\})$, 称为 $\mathfrak{g}$ 的**导代数**. 我们有 $[\mathfrak{s}^3,\mathfrak{s}^3]=\mathfrak{s}^3$, 而 $[\mathfrak{h}^3,\mathfrak{h}^3]=\mathrm{span}(\xi_3)\neq\mathfrak{h}^3$. ////

10 伴随表示 (2021 年 4 月 28 日)

定义 10.1 (指数映射). 设 ξ 是 Lie 群 G 上的左不变向量场, 决定的单参数变换群为 $\{\varphi_t^\xi:G\to G\}_{t\in\mathbb{R}}$. 称 $\exp:\xi|_1\in\mathfrak{g}=\mathrm{Lie}(G)\mapsto\varphi_1^\xi(1)\in G$ 为 G 的**指数映射**. 注意流线 $\gamma_x(t)=\varphi_t^\xi(x)$ 满足 $\gamma_x'(t)=\xi|_{\gamma_x(t)}$.

命题 10.2. *流线 $\gamma_1(t)=\varphi_t^\xi(1)$ 满足 $\gamma_1(s+t)=\gamma_1(s)\gamma_1(t)$, 从而 $\exp((s+t)\xi|_1)=\exp(s\xi|_1)\exp(t\xi|_1)$.*

命题 10.3. *指数映射 exp 光滑, 在 $0\in\mathfrak{g}$ 附近是局部同胚.*

命题 10.4. *若 $A\in\mathfrak{gl}_n$, 则 $\exp(A)=\mathrm{e}^A=\sum_{k=0}^\infty\frac{1}{k!}A^k$.*

证明. 设 $\xi|_{I_n}=A$, 则 $\xi|_X=(\ell_X)_*(\xi|_{I_n})=XA$, 于是流线 $X(t)=\varphi_t^\xi(I_n)$ 满足 $X'(t)=X(t)A$. □

命题 10.5. *Lie 群 G 上的左不变向量场 ξ 决定的单参数变换群为 $\varphi_t^\xi=r_{\exp(t\xi|_1)}:x\mapsto x\exp(t\xi|_1)$.*

证明. 易见 $\exp(t\xi|_1)=\varphi_1^{t\xi}(1)=\varphi_t^\xi(1)=\gamma_1(t)$. 任取 $x\in G$, 令 $\gamma(t)=x\exp(t\xi|_1)=x\gamma_1(t)$, 则 $\gamma(0)=x$ 且 $\gamma'(t)=(\ell_x)_*(\gamma_1'(t))=(\ell_x)_*(\xi|_{\gamma_1(t)})=\xi|_{\gamma(t)}$, 即得 $\gamma(t)=\varphi_t^\xi(x)$. □

命题 10.6. *设 G 是 Lie 群, ξ 是 $\xi|_1\in\mathfrak{g}$ 决定的左不变向量场. 任取 $h\in G$, 则 $(r_{h^{-1}})_*(\xi)\in\Gamma(TG)$ 恰为 $(i_h)_*(\xi|_1)\in\mathfrak{g}$ 决定的左不变向量场, 其中 $r_{h^{-1}}:x\in G\mapsto xh^{-1}\in G$, 且 $i_h:x\in G\mapsto hxh^{-1}\in G$.*

证明. 任取 $g\in G$, 有 $(r_{h^{-1}})_*(\xi)|_g=(r_{h^{-1}})_*(\xi|_{gh})=(r_{h^{-1}})_*((\ell_{gh})_*(\xi|_1))=(\ell_g)_*((i_h)_*(\xi|_1))$. □

定义 10.7 (伴随表示). 设 G 为 Lie 群, 其 Lie 代数为 $\mathfrak{g}$. 内自同构 $i_g:x\in G\mapsto gxg^{-1}\in G$ 在幺元 1 处的切映射记为 $\mathrm{Ad}_g=(i_g)_*:\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$, 则 $\mathrm{Ad}:g\in G\mapsto\mathrm{Ad}_g\in\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ 是 Lie 群同态, 称为 Lie 群 G 的**伴随表示**. 易见 $\mathrm{Ad}_1=\mathrm{Id}_{\mathfrak{g}}$, 称 $\mathrm{ad}=\mathrm{Ad}_*:\mathfrak{g}\to\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ 为 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的**伴随表示**.

命题 10.8. *$\mathrm{ad}_X Y=[X,Y]$, 其中 $\mathrm{ad}_X=\mathrm{ad}(X)$, $\forall X,Y\in\mathfrak{g}=\mathrm{Lie}(G)$.*

证明. 设 ξ 和 η 是 G 上的左不变向量场, ξ 决定单参数变换群 $\{\varphi_t^\xi:G\to G\}_{t\in\mathbb{R}}$. 根据命题10.5, 可得 $\varphi_{-t}^\xi=r_{\exp(t\xi|_1)}^{-1}=r_{\exp(t\xi|_1)^{-1}}$, 进而命题10.6给出 $(\varphi_{-t}^\xi)_*(\eta)|_1=\mathrm{Ad}_{\exp(t\xi|_1)}(\eta|_1)$. 由 Lie 导数的几何解释, 则有 $\mathrm{ad}_{(\xi|_1)}(\eta|_1)=\frac{\partial}{\partial t}|_{t=0}\mathrm{Ad}_{\exp(t\xi|_1)}(\eta|_1)=\frac{\partial}{\partial t}|_{t=0}(\varphi_{-t}^\xi)_*(\eta)|_1=L_\xi(\eta)|_1=[\xi,\eta]|_1=[\xi|_1,\eta|_1]$. □

命题 10.9 (自然性). *若 f 是 Lie 群同态, 则 $f\circ\exp=\exp\circ f_*$. 特别地, $\mathrm{Ad}_{\exp(X)}=\exp(\mathrm{ad}_X)$, $X\in\mathfrak{g}$.*

定义 10.10 (结构常数张量). 设 $\mathfrak{g}$ 是 Lie 代数, 张量 $C:\mathfrak{g}^*\otimes\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}\to\mathbb{R}$ 适合 $C(\omega,\xi,\eta)=\omega([\xi,\eta])$, 则 C 称为**结构常数张量**.

命题 10.11. *一族实数 $\{C_{ij}^k\}$ 对某个 Lie 代数的基 $\{\xi_i\}$ 满足 $[\xi_i,\xi_j]=C_{ij}^k\xi_k$ $(\forall i,j)$, 当且仅当*

1. *(反对称) $C_{ji}^k=-C_{ij}^k$ $(\forall i,j,k)$;*
2. *(Jacobi 恒等式) $C_{i\ell}^mC_{jk}^\ell+C_{k\ell}^mC_{ij}^\ell+C_{j\ell}^mC_{ki}^\ell=0$ $(\forall i,j,k,m)$.*

定义 10.12 (Lie 代数的伴随表示). 称 $\mathrm{ad}:X\in\mathfrak{g}\mapsto\mathrm{ad}_X=[X,\bullet]\in\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ 为 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的**伴随表示**.

注 10.13. Jacobi 恒等式相当于 $\mathrm{ad}_{[X,Y]}=\mathrm{ad}_X\circ\mathrm{ad}_Y-\mathrm{ad}_Y\circ\mathrm{ad}_X$ $(\forall X,Y\in\mathfrak{g})$.

定义 10.14 (结构形式张量). 设 $\mathfrak{g}$ 是 Lie 代数, C 是其结构常数张量. 定义双线性映射 $\Theta:\mathfrak{g}^*\otimes\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}^*$ 适合 $\Theta(\omega,\eta)=C(\omega,\bullet,\eta)$, 则 Θ 称为**结构形式张量**.

定义 10.15 (结构形式). 取定 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的一组基 $\{\xi_i\}$, 将其结构常数记为 $\{C_{ij}^k\}$. 定义线性函数 $\theta_j^k:\mathfrak{g}\to\mathbb{R}$ 使得 $\theta_j^k(\xi_i)=C_{ij}^k$, 则 $\theta=(\theta_j^k)$ 是 $\mathrm{ad}:\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}^*$ 对基底 $\{\xi_i\}$ 的矩阵, 称为**结构形式矩阵**.

注 10.16. 若 $\xi=\xi_i a^i$ 且 $\eta=\xi_i b^i$, 则 $\mathrm{ad}_\xi\,\eta=a^i[\xi_i,\xi_j]b^j=a^i\theta_j^k(\xi_i)\xi_k b^j=\xi_k\theta_j^k(\xi)b^j$.

定义 10.17 (Killing 形式). 称 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 上的二元函数 $\kappa(X,Y)=\mathrm{tr}(\mathrm{ad}_X\circ\mathrm{ad}_Y)$ 为 **Killing 形式**.

命题 10.18. *取 Lie 代数的一组基 $\{\xi_i\}$, 结构常数为 $\{C_{ij}^k\}$, 则 Killing 形式为 $\kappa(a^i\xi_i,b^j\xi_j)=a^ib^jC_{i\lambda}^\mu C_{j\mu}^\lambda$.*

命题 10.19. *在 $\mathfrak{gl}_n$ 上, Killing 形式为 $\kappa(A,B)=2n\,\mathrm{tr}(AB)-2\,\mathrm{tr}(A)\,\mathrm{tr}(B)$.*

证明. 令 $E_{\lambda\mu}=(\delta_\lambda^i\delta_\mu^j)^{1\le i,j\le n}$, 则 $[E_{ij},E_{k\ell}]=(\delta_i^\lambda\delta_{jk}\delta_\ell^\mu-\delta_k^\lambda\delta_{\ell i}\delta_j^\mu)E_{\lambda\mu}$, 即 $C_{ij,k\ell}^{\lambda\mu}=\delta_i^\lambda\delta_{jk}\delta_\ell^\mu-\delta_k^\lambda\delta_{\ell i}\delta_j^\mu$ 为结构常数. 对于 $A=a^{ij}E_{ij}$ 和 $B=b^{k\ell}E_{k\ell}$, 有 $\kappa(A,B)=a^{ij}b^{k\ell}C_{ij,\lambda\mu}^{\sigma\tau}C_{k\ell,\sigma\tau}^{\lambda\mu}$. □

习题 10.1. *写出 Lie 群的指数映射的坐标表示, 据此验证其光滑性.*

解. 我们沿用习题8.1的设定. 任取左不变向量场 $\xi=\xi^i\frac{\partial}{\partial x^i}$, 将其决定的单参数变换群记为 $\{\varphi_t^\xi\}$, 则有从幺元出发的流线 $\gamma_1(t)=\varphi_t^\xi(1)$. 我们有 $\langle \mathrm{d}x^i,\gamma_1'(t)\rangle=\langle \mathrm{d}x^i,\xi|_{\gamma_1(t)}\rangle=\xi^i(\gamma_1(t))=\xi^j(1)\frac{\partial\mu^i}{\partial y^j}|_{(x(\gamma_1(t)),0_n)}$, 从而 $\tilde\gamma^\xi=x\circ\gamma_1$ 满足 $\frac{\mathrm{d}\tilde\gamma^\xi}{\mathrm{d}t}=\left(\xi^j(1)\nu_j^i(\tilde\gamma^\xi(t))\right)^{1\le i\le n}$, 其中 $\nu_j^i(x)=\frac{\partial\mu^i}{\partial y^j}|_{(x,0_n)}$ 是光滑函数. 通过初值 $\tilde\gamma^\xi(0)=x(1)=0_n$ 可以唯一得到微分方程的解 $\tilde\gamma^\xi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$, 它光滑依赖于 $(\xi^j(1))^{1\le j\le n}$. 指数映射 $\exp(\xi|_1)=\gamma_1(1)$ 的坐标表示为 $(\xi^i(1))^{1\le i\le n}\mapsto\tilde\gamma^\xi(1)$, 这是光滑的. ////

习题 10.2. *证明 $\exp:\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})\to\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ 的像集 $\exp(\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}))$ 并不包含 $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})=\{A:\det(A)>0\}$.*

证明. 任取 $X\in\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$, 我们有 $\mathrm{e}^X=(\mathrm{e}^{X/2})^2$, 因此 $\exp(\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}))\subset\{B^2:B\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})\}$; 其实这里可以加强为相等. 为了说明 exp 不能映满 $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$, 只需 $\mathrm{diag}(-1,-2,I_{n-2})$ 无法表为实矩阵的平方; 事实上, 实矩阵的复特征值必定共轭成对, 平方之后得到的 -1 应有偶数个. ■

习题 10.3. *计算下列 Lie 代数的结构形式和 Killing 形式 (用矩阵运算表示):*

(a) $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})$; (b) $\mathfrak{so}_n$; (c) $\mathfrak{h}^3$; (d) $\mathbb{R}^3$ 配备向量叉积作为 Lie 括号.

解. 令 $E_{\lambda\mu}=(\delta_\lambda^i\delta_\mu^j)^{1\le i,j\le n}$, 则 $[E_{ij},E_{k\ell}]=C_{ij,k\ell}^{\lambda\mu}E_{\lambda\mu}$, 其中 $C_{ij,k\ell}^{\lambda\mu}=\delta_i^\lambda\delta_{jk}\delta_\ell^\mu-\delta_k^\lambda\delta_{\ell i}\delta_j^\mu$.

(a) 取定 $\mathfrak{E}=\{E_{ij}\}_{i\ne j}\cup\{E_k\}_{k<n}$ 作为 $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})$ 的一组基, 其中 $E_k=E_{kk}-E_{nn}$. 经计算, 可得元素在 $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})^*$ 中的 (n^2-1) 阶的结构形式矩阵 $\theta=\begin{pmatrix}\theta_{ij}^{k\ell}&\theta_r^{k\ell}\\ \theta_{ij}^s&\theta_r^s\end{pmatrix}$, 适合 $\theta(E_{\lambda\mu})=\begin{pmatrix}C_{\lambda\mu,ij}^{k\ell}&C_{\lambda\mu,rr}^{k\ell}-C_{\lambda\mu,nn}^{k\ell}\\ C_{\lambda\mu,ij}^{ss}&0\end{pmatrix}$ 与 $\theta(E_\nu)=\begin{pmatrix}C_{\nu\nu,ij}^{k\ell}-C_{nn,ij}^{k\ell}&0\\ 0&0\end{pmatrix}$. 若 $X=x^{\lambda\mu}E_{\lambda\mu}$, 其中 $x^{nn}=-\sum_{\nu<n}x^{\nu\nu}$, 则 $\mathrm{ad}_X\in\mathfrak{gl}(\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R}))$ 的坐标表示为 $\theta(X)=\sum_{\lambda\ne\mu}x^{\lambda\mu}\theta(E_{\lambda\mu})+\sum_{\nu<n}x^{\nu\nu}\theta(E_\nu)=x^{\lambda\mu}\begin{pmatrix}C_{\lambda\mu,ij}^{k\ell}&C_{\lambda\mu,rr}^{k\ell}-C_{\lambda\mu,nn}^{k\ell}\\ C_{\lambda\mu,ij}^{ss}&0\end{pmatrix}$. 进而对于 $Y=y^{\varrho\varsigma}E_{\varrho\varsigma}\in\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})$, 有 $\mathrm{ad}_X\circ\mathrm{ad}_Y$ 的坐标表示

$$
\begin{aligned}
\theta(X)\theta(Y)&=x^{\lambda\mu}y^{\varrho\varsigma}\begin{pmatrix}\sum_{i\ne j}C_{\lambda\mu,ij}^{k\ell}C_{\varrho\varsigma,pq}^{ij}+\sum_{r<n}(C_{\lambda\mu,rr}^{k\ell}-C_{\lambda\mu,nn}^{k\ell})C_{\varrho\varsigma,pq}^{rr}&*\\ *&\sum_{i\ne j}C_{\lambda\mu,ij}^{ss}(C_{\varrho\varsigma,uu}^{ij}-C_{\varrho\varsigma,nn}^{ij})\end{pmatrix}\\
&=x^{\lambda\mu}y^{\varrho\varsigma}\begin{pmatrix}C_{\lambda\mu,ij}^{k\ell}C_{\varrho\varsigma,pq}^{ij}-C_{\lambda\mu,nn}^{k\ell}\sum_{r\le n}C_{\varrho\varsigma,pq}^{rr}&*\\ *&C_{\lambda\mu,ij}^{ss}(C_{\varrho\varsigma,uu}^{ij}-C_{\varrho\varsigma,nn}^{ij})\end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

由此即得 Killing 形式

$$
\begin{aligned}
\kappa(X,Y) &= \operatorname{tr}(\mathrm{ad}_X\circ \mathrm{ad}_Y)\\
&= x^{\lambda\mu}y^{\varrho\varsigma}\Big\{\sum_{k\neq\ell}C^{k\ell}_{\lambda\mu,ij}C^{ij}_{\varrho\varsigma,k\ell}-\sum_{k\neq\ell}C^{k\ell}_{\lambda\mu,nn}\sum_{r\le n}C^{rr}_{\varrho\varsigma,k\ell}+\sum_{s<n}C^{ss}_{\lambda\mu,ij}(C^{ij}_{\varrho\varsigma,ss}-C^{ij}_{\varrho\varsigma,nn})\Big\}\\
&= x^{\lambda\mu}y^{\varrho\varsigma}\Big(C^{k\ell}_{\lambda\mu,ij}C^{ij}_{\varrho\varsigma,k\ell}-C^{k\ell}_{\lambda\mu,nn}\underbrace{\textstyle\sum_{r\le n}C^{rr}_{\varrho\varsigma,k\ell}}_{=0}-\underbrace{\textstyle\sum_{s\le n}C^{ss}_{\lambda\mu,ij}}_{=0}C^{ij}_{\varrho\varsigma,nn}\Big)\\
&= x^{\lambda\mu}y^{\varrho\varsigma}C^{k\ell}_{\lambda\mu,ij}C^{ij}_{\varrho\varsigma,k\ell} = x^{\lambda\mu}y^{\varrho\varsigma}(\delta^k_\lambda\delta_{\mu i}\delta^\ell_j-\delta^k_i\delta_{j\lambda}\delta^\ell_\mu)(\delta^i_\varrho\delta_{\varsigma k}\delta^j_\ell-\delta^i_k\delta_{\ell\varrho}\delta^j_\varsigma)\\
&= x^{\lambda\mu}y^{\varrho\varsigma}(\delta^k_\lambda\delta_{\mu i}\delta^\ell_j\delta^i_\varrho\delta_{\varsigma k}\delta^j_\ell-\delta^k_i\delta_{j\lambda}\delta^\ell_\mu\delta^i_\varrho\delta_{\varsigma k}\delta^j_\ell-\delta^k_\lambda\delta_{\mu i}\delta^\ell_j\delta^i_k\delta_{\ell\varrho}\delta^j_\varsigma+\delta^k_i\delta_{j\lambda}\delta^\ell_\mu\delta^i_k\delta_{\ell\varrho}\delta^j_\varsigma)\\
&= x^{\lambda\mu}y^{\varrho\varsigma}(n\delta_{\mu\varrho}\delta_{\varsigma\lambda}-\delta_{\mu\lambda}\delta_{\varsigma\varrho}-\delta_{\mu\lambda}\delta_{\varsigma\varrho}+n\delta_{\varsigma\lambda}\delta_{\mu\varrho})\\
&= 2n\operatorname{tr}(XY)-2\operatorname{tr}(X)\operatorname{tr}(Y)=2n\operatorname{tr}(XY).
\end{aligned}
$$

事实上, $\mathfrak{sl}_n$ 是 $\mathfrak{gl}_n$ 的理想, 所以 $\mathfrak{sl}_n$ 的 Killing 形式是 $\mathfrak{gl}_n$ 的 Killing 形式的限制.

(b) 取定 $\mathfrak{D}=\{D_{ij}\}_{i<j}$ 作为 $\mathfrak{so}_n$ 的一组基, 其中 $D_{ij}=E_{ij}-E_{ji}$. 计算可得元素在 $\mathfrak{so}_n^*$ 中的 $\binom{n}{2}$ 阶的结构形式矩阵 $\theta=(\theta^{k\ell}_{ij})$, 适合 $\theta^{k\ell}_{ij}(D_{\lambda\mu})=C^{k\ell}_{\lambda\mu,ij}-C^{k\ell}_{\mu\lambda,ij}-C^{k\ell}_{\lambda\mu,ji}+C^{k\ell}_{\mu\lambda,ji}$. 若 $X=x^{\lambda\mu}E_{\lambda\mu}$ 满足 $x^{\mu\lambda}=-x^{\lambda\mu}$, 则 $\mathrm{ad}_X\in\mathfrak{gl}(\mathfrak{so}_n)$ 坐标表示为 $\theta(X)=\sum_{\lambda<\mu}x^{\lambda\mu}(\theta^{k\ell}_{ij}(D_{\lambda\mu}))^{k<\ell}_{i<j}=x^{\lambda\mu}(C^{k\ell}_{\lambda\mu,ij}-C^{k\ell}_{\lambda\mu,ji})^{k<\ell}_{i<j}$. 对 $Y=y^{\varrho\varsigma}E_{\varrho\varsigma}\in\mathfrak{so}_n$ 有 $\mathrm{ad}_X\circ\mathrm{ad}_Y$ 坐标表示 $\theta(X)\theta(Y)=x^{\lambda\mu}y^{\varrho\varsigma}(\sum_{i<j}(C^{k\ell}_{\lambda\mu,ij}-C^{k\ell}_{\lambda\mu,ji})(C^{ij}_{\varrho\varsigma,rs}-C^{ij}_{\varrho\varsigma,sr}))^{k<\ell}_{r<s}$, 由

$$
\begin{aligned}
&\textstyle\sum_{k<\ell}\sum_{i<j}(C^{k\ell}_{\lambda\mu,ij}-C^{k\ell}_{\lambda\mu,ji})(C^{ij}_{\varrho\varsigma,k\ell}-C^{ij}_{\varrho\varsigma,\ell k})\\
&=\textstyle\sum_{k<\ell}\sum_{i<j}\{\delta^k_\lambda(\delta_{\mu i}\delta^\ell_j-\delta_{\mu j}\delta^\ell_i)-(\delta^k_i\delta_{j\lambda}-\delta^k_j\delta_{i\lambda})\delta^\ell_\mu\}\{\delta^i_\varrho(\delta_{\varsigma k}\delta^j_\ell-\delta_{\varsigma\ell}\delta^j_k)-(\delta^i_k\delta_{\ell\varrho}-\delta^i_\ell\delta_{k\varrho})\delta^j_\varsigma\}\\
&=\textstyle\sum_{k<\ell}\sum_{i<j}\{\ \delta^k_\lambda\delta^i_\varrho(\delta_{\mu i}\delta_{\varsigma k}\delta^\ell_j-\delta_{\mu i}\delta_{\varsigma\ell}\overbrace{\delta^\ell_j\delta^j_k}^{=0}-\delta_{\mu j}\delta_{\varsigma k}\overbrace{\delta^\ell_i\delta^j_\ell}^{=0}+\delta_{\mu j}\delta_{\varsigma\ell}\overbrace{\delta^\ell_i\delta^j_k}^{=0})\\
&\qquad -\delta^k_\lambda\delta^j_\varsigma(\delta_{\mu i}\delta_{\ell\varrho}\delta^i_k\delta^\ell_j+\delta_{\mu j}\delta_{k\varrho}\delta^\ell_i)-\delta^\ell_\mu\delta^i_\varrho(\delta_{j\lambda}\delta_{\varsigma k}\delta^k_i\delta^j_\ell+\delta_{i\lambda}\delta_{\varsigma\ell}\delta^j_k)+\delta^\ell_\mu\delta^j_\varsigma\delta_{j\lambda}\delta_{\ell\varrho}\delta^k_i\ \}\\
&=\delta_{\mu\varrho}\delta_{\varsigma\lambda}(n-\max\{\lambda,\varrho\})-(\delta_{\mu\lambda}\delta_{\varsigma\varrho}+\delta_{\mu\varsigma}\delta_{\lambda\varrho}(\varsigma-\lambda-1))\mathbb{1}_{\{\lambda<\varsigma\}}\\
&\qquad -(\delta_{\mu\lambda}\delta_{\varsigma\varrho}+\delta_{\varrho\lambda}\delta_{\varsigma\mu}(\mu-\varrho-1))\mathbb{1}_{\{\mu>\varrho\}}+\delta_{\varsigma\lambda}\delta_{\mu\varrho}(\min\{\varsigma,\mu\}-1)\\
&=\delta_{\mu\varrho}\delta_{\varsigma\lambda}(n-|\mu-\lambda|-1)-\delta_{\lambda\mu}\delta_{\varrho\varsigma}\mathbb{1}_{\{\lambda\neq\varrho\}}-2\delta_{\lambda\varrho}\delta_{\varsigma\mu}(\mu-\lambda-1)\mathbb{1}_{\{\mu>\lambda\}}
\end{aligned}
$$

可得 Killing 形式 $\kappa(X,Y)=\operatorname{tr}(\mathrm{ad}_X\circ\mathrm{ad}_Y)=x^{\lambda\mu}y^{\varrho\varsigma}\sum_{k<\ell}\sum_{i<j}(C^{k\ell}_{\lambda\mu,ij}-C^{k\ell}_{\lambda\mu,ji})(C^{ij}_{\varrho\varsigma,k\ell}-C^{ij}_{\varrho\varsigma,\ell k})=\sum_{\lambda,\mu}x^{\lambda\mu}y^{\mu\lambda}(n-|\mu-\lambda|-1)-\sum_{\lambda\neq\varrho}\cancel{x^{\lambda\lambda}y^{\varrho\varrho}}-2\sum_{\lambda<\mu}x^{\lambda\mu}y^{\lambda\mu}(|\mu-\lambda|-1)=(n-2)\operatorname{tr}(XY)$.

(c) 延续习题9.3, 可得元素在 $(\mathfrak{h}^3)^*$ 中的 3 阶的结构形式矩阵 $\theta=(\theta^k_j)$, 适合 $\theta^k_j(\xi_i)=c^k_{ij}$. 若 $X=x^i\xi_i$, 则 $\mathrm{ad}_X\in\mathfrak{gl}(\mathfrak{h}^3)$ 的坐标表示为 $\theta(X)=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\-x^2&x^1&0\end{pmatrix}$. 进而对于 $Y=y^i\xi_i\in\mathfrak{h}^3$, 有 $\mathrm{ad}_X\circ\mathrm{ad}_Y$ 的坐标表示 $\theta(X)\theta(Y)=0$, 由此即得 Killing 形式 $\kappa(X,Y)=\operatorname{tr}(\mathrm{ad}_X\circ\mathrm{ad}_Y)\equiv 0$.

(d) 取定 $\{e_1,e_2,e_3\}$ 作为 $\mathbb{R}^3$ 的一组基, 其中 $e_i=(\delta^j_i)^{1\le j\le 3}$. 经计算, 可得元素在 $(\mathbb{R}^3)^*$ 中的 3 阶的结构形式矩阵 $\theta=(\theta^k_j)$, 适合 $\theta^k_j(e_i)=\varepsilon_{(ijk)}$. 若 $X=x^ie_i$, 则 $\mathrm{ad}_X\in\mathfrak{gl}(\mathbb{R}^3)$ 的坐标表示为 $\theta(X)=\begin{pmatrix}0&-x^3&x^2\\x^3&0&-x^1\\-x^2&x^1&0\end{pmatrix}$. 进而对 $Y=y^ie_i$ 有 $\mathrm{ad}_X\circ\mathrm{ad}_Y$ 的坐标表示

$$\theta(X)\theta(Y)=\begin{pmatrix}-x^2y^2-x^3y^3&*&*\\ *&-x^3y^3-x^1y^1&*\\ *&*&-x^1y^1-x^2y^2\end{pmatrix},$$

由此即得 Killing 形式 $\kappa(X,Y)=\operatorname{tr}(\mathrm{ad}_X\circ\mathrm{ad}_Y)=-2(x^1y^1+x^2y^2+x^3y^3)=-2X^\top Y$. ////

11 Maurer–Cartan 形式 (2021 年 5 月 5 日)

定义 11.1 (向量值微分形式). 设 M 是流形, V 是向量空间. 称 $\Omega^k(M;V)=\Omega^k(M)\otimes V$ 中的元素为 M 上取值于 V 的 **k-形式**. 任取 V 的一组基 $\{e_i\}$, 可将 $\alpha\in\Omega^k(M;V)$ 唯一地表示为 $\alpha=\alpha^i e_i$, 其中 $\alpha^i\in\Omega^k(M)$ 称为 α 对 e_i 的坐标. 可以验证下面的运算不依赖基底 $\{e_i\}$ 的选取.

外微分定义为 $\mathrm{d}:\alpha^i e_i\in\Omega^k(M;V)\mapsto(\mathrm{d}\alpha^i)e_i\in\Omega^{k+1}(M;V)$.

对于 Lie 代数 $\mathfrak{g}$, 令 $[\bullet\wedge\bullet]:(\alpha^i e_i,\beta^j e_j)\in\Omega^k(M;\mathfrak{g})\times\Omega^\ell(M;\mathfrak{g})\mapsto(\alpha^i\wedge\beta^j)[e_i,e_j]\in\Omega^{k+\ell}(M;\mathfrak{g})$.

由 $f:N\to M$ 诱导的**拉回映射**定义为 $f^*:\alpha^i e_i\in\Omega^k(M;V)\mapsto f^*(\alpha^i)e_i\in\Omega^k(N;V)$.

定义 11.2 (Maurer–Cartan 形式). 设 G 为 Lie 群, 其 Lie 代数为 $\mathfrak{g}=T_1G$. 称 $\omega\in\Omega^1(G;\mathfrak{g})$ 为 G 上的 **Maurer–Cartan 形式**, 若对 $\forall g\in G$ 有 $\omega|_g=(\ell_{g^{-1}})_*:T_gG\to T_1G$.

注 11.3. 有时 Lie 群上的左不变余切向量场 (1-形式) 也称为 Maurer–Cartan 形式.

左不变微分形式的外积和外微分得到左不变微分形式.

命题 11.4. *任取 $\mathfrak{g}=T_1G$ 的一组基 $\{\xi_i|_1\}$ 生成左不变标架场 $\{\xi_i\}$, 则相应的对偶余标架场 $\{\omega^i\}$ 也是左不变的, 并且 $\omega^i\,\xi_i|_1\in\Omega^1(G;\mathfrak{g})$ 恰为 Maurer–Cartan 形式.*

证明. 任取 $v=a^j\xi_j|_g\in T_gG$, 有 $\langle\omega^i|_g,v\rangle=a^i=\langle\omega^i|_1,a^j\xi_j|_1\rangle=\langle\omega^i|_1,(\ell_{g^{-1}})_*(v)\rangle=\langle(\ell_{g^{-1}})^*(\omega^i|_1),v\rangle$, 即得 $\omega^i|_g=(\ell_{g^{-1}})^*(\omega^i|_1)$, 且 $(\omega^i\,\xi_i|_1)|_g(v)=\langle\omega^i|_g,v\rangle\xi_i|_1=a^i\xi_i|_1=(\ell_{g^{-1}})_*(v)$. □

推论 11.5. *取值于 $\mathfrak{g}$ 的 Maurer–Cartan 形式 ω 左不变, 即满足 $(\ell_g)^*(\omega)=\omega$, $\forall g\in G$.*

注 11.6. 考虑 $G=\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, 其中元素 X 的坐标表示为 (x^i_j). 由 $\frac{\partial}{\partial x^i_j}|_{I_n}=\delta^\lambda_i\delta^j_\mu\frac{\partial}{\partial x^\lambda_\mu}|_{I_n}$ 生成左不变切向量场 E^j_i, 即 $E^j_i|_X=(\ell_X)_*(\frac{\partial}{\partial x^i_j}|_{I_n})=x^\lambda_\nu\delta^\nu_i\delta^j_\mu\frac{\partial}{\partial x^\lambda_\mu}|_X=x^\lambda_i\frac{\partial}{\partial x^\lambda_j}|_X$ $(\forall X\in G)$. 将 X^{-1} 表示为 (y^i_j), 则 $\{E^j_i\}$ 的对偶余标架场 $\{\omega^i_j\}$ 满足 $\omega^i_j(\frac{\partial}{\partial x^\lambda_\mu})=\omega^i_j(\delta^k_\lambda\frac{\partial}{\partial x^k_\mu})=\omega^i_j(x^k_\nu y^\nu_\lambda\frac{\partial}{\partial x^k_\mu})=\omega^i_j(y^\nu_\lambda E^\mu_\nu)=y^\nu_\lambda\delta^\mu_j\delta^i_\nu=y^i_\lambda\delta^\mu_j$, 从而 $\omega^i_j=y^i_\lambda\delta^\mu_j\,\mathrm{d}x^\lambda_\mu=y^i_\lambda\,\mathrm{d}x^\lambda_j$. 引入矩阵记号, 即得 $(\omega^i_j)=X^{-1}\,\mathrm{d}X$.

定理 11.7 (Maurer–Cartan 方程). *取值于 $\mathfrak{g}$ 的 Maurer–Cartan 形式 ω 满足 $\mathrm{d}\omega+\frac{1}{2}[\omega\wedge\omega]=0$.*

证明. 将 $\{\xi_i\}$ 的结构常数记为 $\{C^k_{ij}\}$, 则活动标架引理给出 $\mathrm{d}\omega^k=-\sum_{i<j}C^k_{ij}\omega^i\wedge\omega^j=-\frac{1}{2}C^k_{ij}\omega^i\wedge\omega^j$, 于是 $\mathrm{d}\omega=(\mathrm{d}\omega^k)\xi_k|_1=-\frac{1}{2}C^k_{ij}(\omega^i\wedge\omega^j)\xi_k|_1=-\frac{1}{2}(\omega^i\wedge\omega^j)[\xi_i|_1,\xi_j|_1]=-\frac{1}{2}[\omega\wedge\omega]$. □

习题 11.1. *设 M 是光滑流形, V 是线性空间, 则 V-值 k-形式是 $\Omega^k(M)\otimes V$ 中的元素.*

(a) 定义 V-值 0-形式 $f=f^i\otimes\xi_i$ 对光滑切向量场 X 的方向导数为 $\partial_X(f)=\partial_X(f^i)\otimes\xi_i$. 证明 $\partial_X(f)$ 不依赖 f 的表达式的选取. 注意 $\{\xi_i\}$ 未必是 V 的基.

(b) 任取 V-值 k-形式 $\alpha=\alpha^i\otimes\xi_i$ 和 k 个光滑切向量场 $X_1,\dots,X_k$, 定义取值 $\langle\alpha,X_1,\dots,X_k\rangle=\langle\alpha^i,X_1,\dots,X_k\rangle\otimes\xi_i$. 证明 $\langle\alpha,X_1,\dots,X_k\rangle$ 不依赖 α 的表达式的选取.

(c) 当 $V=\mathfrak{g}$ 是 Lie 代数时, 对 $\mathfrak{g}$-值 k-形式 $\alpha=\alpha^i\otimes\xi_i$ 和 $\mathfrak{g}$-值 ℓ-形式 $\beta=\beta^j\otimes\eta_j$, 定义它们的外积 Lie 括号为 $[\alpha\wedge\beta]=(\alpha^i\wedge\beta^j)\otimes[\xi_i,\eta_j]$. 证明 $[\alpha\wedge\beta]$ 不依赖 α 和 β 的表达式的选取.

证明. 取定 V 的一组基 $\{e_i\}$, 则存在 (a^λ_i) 和 (b^μ_j), 使得 $\xi_i=a^\lambda_i e_\lambda$ 和 $\eta_j=b^\mu_j e_\mu$.

(a) 我们有 $f^i\xi_i=a^\lambda_i f^i e_\lambda$ 和 $\partial_X(f^i)\xi_i=a^\lambda_i\partial_X(f^i)e_\lambda=\partial_X(a^\lambda_i f^i)e_\lambda$.

(b) 我们有 $\alpha^i\xi_i=a^\lambda_i\alpha^i e_\lambda$ 和 $\langle\alpha^i,X_1,\dots,X_k\rangle\xi_i=a^\lambda_i\langle\alpha^i,X_1,\dots,X_k\rangle e_\lambda=\langle a^\lambda_i\alpha^i,X_1,\dots,X_k\rangle e_\lambda$.

(c) 我们有 $\alpha^i\xi_i=a^\lambda_i\alpha^i e_\lambda$ 和 $\beta^j\eta_j=b^\mu_j\beta^j e_\mu$, 以及

$$(\alpha^i\wedge\beta^j)[\xi_i,\eta_j]=a^\lambda_i b^\mu_j(\alpha^i\wedge\beta^j)[e_\lambda,e_\mu]=\big((a^\lambda_i\alpha^i)\wedge(b^\mu_j\beta^j)\big)[e_\lambda,e_\mu].$$

注意: 上述证明中, α 对 e_λ 的坐标 $a^\lambda_i\alpha^i$ 是唯一的. ■

习题 11.2. *写出 SO_3 的 Maurer–Cartan 方程，以及 $\mathfrak{so}_3$-值 Maurer–Cartan 形式的具体表达式.*

解. 取定 $\mathfrak{so}_3$ 的一组基: $\xi_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\xi_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\xi_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 其结构常数为 $c_{ij}^k = \varepsilon_{(ijk)}$, 适合 $[\xi_i, \xi_j] = c_{ij}^k \xi_k$. 用 $\{\xi_i\}$ 生成左不变标架场 $\{E_i\}$, 即 $E_i|_A = A\xi_i$ $(\forall A \in \mathrm{SO}_3)$, 对偶的余标架场记为 $\{\omega^i\}$, 适合 $\langle \omega^i|_A, x^j A\xi_j\rangle = \langle \omega^i|_{I_3}, x^j\xi_j\rangle = x^j\delta_j^i$ $(\forall A \in \mathrm{SO}_3)$. 此时 Maurer–Cartan 方程为 $\mathrm{d}\omega^k = -\frac{1}{2}c_{ij}^k\omega^i \wedge \omega^j$, 亦即 $\begin{cases} \mathrm{d}\omega^1 = -\omega^2 \wedge \omega^3 \\ \mathrm{d}\omega^2 = \omega^1 \wedge \omega^3 \\ \mathrm{d}\omega^3 = -\omega^1 \wedge \omega^2 \end{cases}$, 而 Maurer–Cartan 形式为 $\omega = \omega^i \otimes \xi_i$. ////

习题 11.3. *设 $\mathfrak{g}$ 是 Lie 群 G 的 Lie 代数，则 $\mathfrak{g}$-值 Maurer–Cartan 形式 ω 可以把 G 上的任一切向量推到 T_1G 中. 对光滑曲线 $\gamma\colon (a,b) \to G$ 和定义在 $p_0 = \gamma(t_0)$ 附近的光滑切向量场 X, 定义*

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial\gamma}|_{t_0}} X = (\ell_{\gamma(t_0)})_* \Big(\lim_{t\to t_0} \frac{\omega(X)|_{\gamma(t)} - \omega(X)|_{\gamma(t_0)}}{t - t_0} \Big).$$

(a) 证明 $\nabla_{\frac{\partial}{\partial\gamma}|_{t_0}} X$ 由 X 和 $\frac{\partial}{\partial\gamma}|_{t_0} \in T_{p_0}G$ 决定，与 γ 的选择无关.

(b) 设 Z 是 G 上的左不变切向量场，并且 $Z|_{p_0} = \xi \in T_{p_0}G$. 请问 Lie 导数 $L_Z(X)|_{p_0}$ 是否等于 $\nabla_\xi X$? 如果是，证明之; 否则举出反例.

证明. (a) 注意到 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|_{t_0}\omega(X)|_{\gamma(t)} = \gamma_*(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|_{t_0})(\omega(X)) = \frac{\partial}{\partial\gamma}|_{t_0}\omega(X)$ 即可.

(b) 我们构造反例如下. 对于左不变切向量场 X, 有 $\omega(X)|_{\gamma(t)} = (\ell_{\gamma(t)^{-1}})_*(X|_{\gamma(t)}) = X|_1$, 即得 $\nabla_\xi X = 0$, 而 $L_Z(X) = [Z, X]$ 可以非零. ■

12 微分形式的积分 (2021 年 5 月 12 日 +14 日)

注 12.1 (路线图). (1) 流形一个图卡上的积分 (← 欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 上的积分)

(2) 定向 n 维流形上紧支 n-形式的积分 (← 用单位分解来拼接各图卡)

(3) 广义积分是紧集上积分的极限 (→ 允许流形有 “不太复杂” 的边界)

(4) 定向 m 维浸入子流形上 m-形式的积分

定义 12.2 (支撑集). 张量场 T 的**支撑集**为 $\mathrm{supp}(T) = \overline{\{p : T|_p \neq 0\}}$. 若 $\mathrm{supp}(T)$ 紧, 则称 T 有紧支.

注 12.3 (鼓包函数). 记 $\psi(t) = \mathrm{e}^{-1/t}\mathbb{1}_{\{t>0\}}$, 则 $\varphi(x) = \psi(1 + \|x\|^2)\psi(1 - \|x\|^2)/\psi(1)^2$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的紧支 0-形式, 称为鼓包函数, 满足 $\mathrm{supp}(\varphi) = \{x : \|x\| \le 1\}$ 和 $\varphi(\mathbb{R}^n) = [0, 1]$.

定义 12.4 (定向). 设 M 是 n 维光滑流形, 在 $p \in M$ 处的**定向**指的是切空间 T_pM 的基底的一个定向相容等价类. 一个定向图册通过其中的图卡在每点都唯一指定一个定向. 回顾定义6.25.

定义 12.5 (图卡上的积分). 设 M 是 n 维光滑流形, (U, x) 是 M 的一个图卡. 若 $\alpha \in \Omega^n(M)$ 有紧支 $\mathrm{supp}(\alpha) \subset U$, 记 $\alpha = f\,\mathrm{d}x^{1,\cdots,n}$, 则 α 的**积分**为 $\int_M \alpha = \int_U \alpha = \int_{\mathbb{R}^n} f \circ x^{-1}(x^1, \ldots, x^n)\,\mathrm{d}x^1 \cdots \mathrm{d}x^n$.

命题 12.6. *若 (U, x) 和 (V, y) 是定向相容的图卡, 且 $\mathrm{supp}(\alpha) \subset U \cap V$, 则 $\int_U \alpha = \int_V \alpha$.*

证明. 设 $f\,\mathrm{d}x^{1,\cdots,n} = g\,\mathrm{d}y^{1,\cdots,n}$, 则 $f = g\det(\frac{\partial y^i}{\partial x^j})$. 由变量替换公式,

$\int_{\mathbb{R}^n} g\,\mathrm{d}y^1 \cdots \mathrm{d}y^n = \int_{\mathbb{R}^n} g\,|\det(\frac{\partial y^i}{\partial x^j})|\,\mathrm{d}x^1 \cdots \mathrm{d}x^n = \int_{\mathbb{R}^n} f\,\mathrm{d}x^1 \cdots \mathrm{d}x^n$. □

注 12.7. 若 (U,x) 和 (V,y) 是定向相反的图卡, 且 $\mathrm{supp}(\alpha)\subset U\cap V$, 则 $\int_U \alpha = -\int_V \alpha$.

定理 12.8 (单位分解). *设 M 是光滑流形. 任取 M 的开覆盖 $\mathcal{U}$, 存在可数个光滑函数 $\varrho_\lambda : M\to[0,1]$, $\lambda\in\Lambda$, 使得*

- *任一 $\mathrm{supp}(\varrho_\lambda)$ 都含于某个 $U\in\mathcal{U}$, 且*
- *$\sum_{\lambda\in\Lambda}\varrho_\lambda\equiv 1$, 其中 $\forall p\in M$ 都有某个邻域 V_p 满足 $\#\{\lambda\in\Lambda : \mathrm{supp}(\varrho_\lambda)\cap V_p\neq\emptyset\}<\infty$*

这样的 $\{\varrho_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 称为一个从属于 $\mathcal{U}$ 的 (光滑) **单位分解**. 对 $\forall\lambda\in\Lambda$ 选定 $U_\lambda\in\mathcal{U}$ 使得 $\mathrm{supp}(\varrho_\lambda)\subset U_\lambda$, 则 $\{\sum_{\lambda:U_\lambda=U}\varrho_\lambda\}_{U\in\mathcal{U}}$ 称为从属于 $\mathcal{U}$ 的 **(广义) 单位分解**.

证明. 对 $\forall p\in M$ 取邻域 U_p 使得 $\overline{U_p}$ 紧, 然后由 Lindelöf 引理得到 $\{U_{p_i}\}_{i=1}^\infty$ 覆盖 M. 记 $G_0=\emptyset$, 归纳定义 $G_k=\bigcup_{i=1}^{i_k+1}U_{p_i}$, 其中 $i_k=\min\{j:\overline{G_{k-1}}\subset\bigcup_{i=1}^{j}U_{p_i}\}$, 则 $\overline{G_k}=\bigcup_{i=1}^{i_k+1}\overline{U_{p_i}}$ 紧. 令 $A_k=\overline{G_k}\setminus G_{k-1}$, 则 $\{A_k\}_{k=1}^\infty$ 是覆盖 M 的一族紧集. 对 $\forall p\in A_k$, 存在 $U\in\mathcal{U}$ 包含 p, 可取坐标函数 x 使得 $x(p)=0$, 且 $W_p=\{q:\|x(q)\|<2\}$ 满足 $\overline{W_p}=\{q:\|x(q)\|\le 2\}\subset U\cap G_{k+1}\setminus\overline{G_{k-2}}$. 令 $V_p=\{q:\|x(q)\|<1/2\}$, 则存在 $\{p_{kj}\}_{j=1}^{j_k}$ 使得 $A_k\subset\bigcup_{j=1}^{j_k}V_{p_{kj}}$. 构造光滑的截断函数 $h_{kj}:M\to[0,1]$, 适合 $h_{kj}|_{V_{p_{kj}}}\equiv 1$ 和 $\mathrm{supp}(h_{kj})\subset W_{p_{kj}}$, 则 $\{h_{kj}/h\}$ 即为所求, 其中 $h=\sum h_{kj}$. □

定义 12.9 (流形上的积分). 设 M 是定向 n 维光滑流形, $\{\rho_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 是从属于定向图册 $\{(U,x)\}$ 的光滑单位分解. 若 $\alpha\in\Omega^n(M)$ 有紧支, 则 α 的**积分**为 $\int_M\alpha=\sum_{\lambda\in\Lambda}\int_M\rho_\lambda\alpha$.

注 12.10. 在紧致的 $\mathrm{supp}(\alpha)$ 上, 只有有限多个 ρ_λ 非零.

命题 12.11. *若 $\{(U,x)\}$ 和 $\{(V,y)\}$ 是定向相容的定向图册, $\{\rho_\lambda\}$ 和 $\{\sigma_\mu\}$ 分别是从属于 $\{U\}$ 和 $\{V\}$ 的光滑单位分解, 则 $\sum_\lambda\int_M\rho_\lambda\alpha=\sum_\mu\int_M\sigma_\mu\alpha$.*

证明. $\sum_\mu\int_M\sigma_\mu\alpha=\sum_\mu\int_M\sum_\lambda\rho_\lambda\sigma_\mu\alpha=\sum_{\lambda,\mu}\int_M\rho_\lambda\sigma_\mu\alpha=\sum_\lambda\int_M\sum_\mu\rho_\lambda\sigma_\mu\alpha=\sum_\lambda\int_M\rho_\lambda\alpha$. □

定义 12.12 (广义积分). 设 M 是定向流形, ω 是 $(\dim M)$-形式. 取一列开子集 M_k 覆盖 M, 使得 $\overline{M_k}$ 紧且 $\overline{M_k}\subset M_{k+1}$. 可以构造截断函数 $f_k:M\to[0,1]$, 使得 $f_k|_{M_k}\equiv 1$ 且 $\mathrm{supp}(f_k)\subset M_{k+1}$. 若 $\lim_{k\to\infty}\int_M f_k\omega$ 存在 (允许是 $\pm\infty$), 并且与 M_k 或 f_k 的选择无关, 则称之为 ω 的**广义积分**, 记为 $\int_M\omega$.

命题 12.13. *设 M 是连通的定向流形, ω_0 是处处非零的 $(\dim M)$-形式, 在某一组 $\{M_k\}$ 和 $\{f_k\}$ 的选择下 $\lim_{k\to\infty}\int_M f_k\omega_0$ 存在且有限. 若 $\omega=h\omega_0$, 其中 h 是有界函数, 则 $\int_M\omega$ 有定义且有限.*

推论 12.14. *若 U 是 M 的开子集, $\overline{U}$ 紧, 则 $\int_U\omega|_U$ 有定义.*

定义 12.15 (Hausdorff 零测集). 对于 $A\subset\mathbb{R}^n$, 其 **Hausdorff 外测度**为 $\mathcal{H}^s(A)=\inf\{\sum_{i=1}^\infty\mathrm{diam}(U_i)^s : \{U_i\}_{i=1}^\infty$ 是 A 的开覆盖$\}$, 其中 $\mathrm{diam}(U)=\sup_{x,y\in U}\|x-y\|$. 若 $\mathcal{H}^s(A)=0$, 则称 A 为 s 维 **Hausdorff 零测集**. 设 M 是流形, 若 $M=\bigcup_{k=1}^\infty A_k$, 其中任一 A_k 都在某个图卡 (U_k,x_k) 中, 且 $x_k(A_k)$ 是 s 维零测集, 则称 M 是 s 维**零测集**.

命题 12.16 (可数可加性). *若 U_k 两两不交, $M\setminus\bigcup_{k=1}^\infty U_k$ 是 $\dim M$ 维零测集, 则 $\int_M\omega=\sum_{k=1}^\infty\int_{U_k}\omega|_{U_k}$.*

习题 12.1. *设 M 是 (第二可数的) 光滑流形, N 是 M 的光滑嵌入子流形, 并且 N 是闭集. 任取光滑函数 $f:N\to\mathbb{R}$, 证明存在光滑函数 $\tilde f:M\to\mathbb{R}$, 使得 $\tilde f|_N=f$.*

证明. 对 $\forall p\in N$, 可取 M 的图卡 (U_p,x_p), 使得 $N\cap U_p=\{q\in U_p : x_p^i(q)=0\ (\forall i>\dim N)\}$.
考虑 M 的开覆盖 $\{U_p\}_{p\in N}\cup\{M\setminus N\}$, 取一个从属于它的单位分解 $\{\phi_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, 其中

当 $\lambda\in\Lambda_0$ 时 $\mathrm{supp}(\phi_\lambda)\subset U_{p_\lambda}$ 对某个 $p_\lambda\in N$ 成立, 当 $\lambda\in\Lambda\setminus\Lambda_0$ 时 $\mathrm{supp}(\phi_\lambda)\subset M\setminus N$.

令 $f_\lambda(q)=f\circ x_{p_\lambda}^{-1}(x_{p_\lambda}^1(q),\dots,x_{p_\lambda}^{\dim N}(q),0_{\dim M-\dim N})$, $q\in U_{p_\lambda}$, 则 $\tilde f=\sum_{\lambda\in\Lambda_0}\phi_\lambda f_\lambda$ 即为所求. ■

注. 闭子流形上的函数才有整体延拓. 作为反例, 定义于 $(0,\infty)$ 的 $f(t)=1/t$ 不能光滑延拓到 $\mathbb{R}$ 上.

习题 12.2. 将 $\mathbb{R}^n$ 中以 p 为球心以 ε 为半径的开实心球记为 $B_\varepsilon^n(p)$. 集合 $A\subset\mathbb{R}^n$ 是 d 维 *Hausdorff* 零测的 *(*简称 d 零测*)*, 当且仅当 $\inf\{\sum_{k=1}^\infty \varepsilon_k^d : A\subset\bigcup_{k=1}^\infty B_{\varepsilon_k}^n(p_k)\}=0$. 证明*:*

(a) 对 $\forall d>0$, 有理数集 $\mathbb{Q}$ 是 d 零测的.

(b) 若 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ 光滑, $d>n$, 则 $f(A)$ 是 d 零测的, $A\subset\mathbb{R}^n$.

证明. (a) 表 $\mathbb{Q}=\{q_1,q_2,\dots\}$. 对 $\forall\epsilon>0$, 我们有 $\mathbb{Q}\subset\bigcup_{k=1}^\infty B^1_{\epsilon/2^k}(q_k)$, 而 $\sum_{k=1}^\infty(\epsilon/2^k)^d=\epsilon^d/(2^d-1)$.

(b) 由于 Hausdorff 外测度是单调递增的和次可数可加的, 只需对 $\forall R>1$ 证明 $f(B_R)$ 是 d 零测的, 其中 $B_R=B^n_R(0_n)$. 任取 $\epsilon\in(0,1)$, 令 $L=\max_{p\in\overline{B_{R+1}}}\|\mathrm{grad}\, f(p)\|$, 则 f 在 $B_{R+\epsilon}$ 上 L-Lipschitz 连续. 覆盖 B_R 的 ϵ-球的最小个数不超过 $(2R/\epsilon)^n$, 这些球心的像作为球心可以得到覆盖 $f(B_R)$ 的 $(L\epsilon)$-球. 我们有 $(2R/\epsilon)^n(L\epsilon)^d=(2R)^nL^d\epsilon^{d-n}\to 0$ $(\epsilon\to 0)$, 即证所欲. ■

13 Stokes 定理 (2021 年 5 月 14 日 +19 日)

定义 13.1 (子流形上的积分)**.** 设 M 是定向 m 维光滑流形, N 是 n 维光滑流形, $f:M\to N$ 是光滑浸入. 对于 $\omega\in\Omega^m(N)$, 称 $\int_{f(M)}\omega=\int_M f^*(\omega)$ 为 ω 在 $f(M)$ 上的**积分**. 这推广了第二型积分.

定义 13.2 (第一型积分)**.** 设 M 是定向 Riemann 流形, V 是体积形式 (见定义6.23), 则**第一型积分**形如 $\int_M hV$, 其中 h 是光滑函数.

注 13.3 (曲线积分). 设 $\gamma:(a,b)\to\mathbb{R}^n$ 是光滑嵌入, $\vec F=F^i\frac{\partial}{\partial x^i}$ 是光滑向量场, 则 $\vec F$ 沿 γ 的第二型曲线积分恰为 $\langle\vec F,\vec T\rangle$ 在 γ 上的第一型曲线积分, 即 $\int_\gamma\sum_{i=1}^n F^i\,\mathrm{d}x^i=\int_a^b\langle\vec F|_{\gamma(t)},\gamma'(t)\rangle\,\mathrm{d}t=\int_\gamma\langle\vec F,\vec T\rangle\,\mathrm{d}s$, 其中 $\vec T|_{\gamma(t)}=\gamma'(t)/\|\gamma'(t)\|$, 弧长 $\mathrm{d}s$ 是通过 $\mathbb{R}^n$ 上的标准内积诱导的 γ 上的体积形式.

注 13.4 (曲面积分). 设 $f:U\subset\mathbb{R}^2\to S=f(U)\subset\mathbb{R}^3$ 是光滑嵌入, $\vec F=(P,Q,R)$ 是光滑向量场, 则 $\vec F$ 对 S 的第二型曲面积分恰为 $\langle\vec F,\vec n\rangle$ 在 S 上的第一型曲面积分, 即 $\iint_S P\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_U\langle\vec F|_{f(u,v)},\frac{\partial}{\partial u}\times\frac{\partial}{\partial v}\rangle\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\iint_S\langle\vec F,\vec n\rangle\,\mathrm{d}\sigma$, 其中 $\vec n|_{f(u,v)}=(\frac{\partial f}{\partial u}\times\frac{\partial f}{\partial v})/\|\frac{\partial f}{\partial u}\times\frac{\partial f}{\partial v}\|$ 是单位法向量, 而 S 上的面积形式 $\mathrm{d}\sigma$ 通过 $\mathbb{R}^3$ 上的标准内积诱导得到.

推论 13.5. 作为 *Stokes* 公式 *(*定理*13.18)* 的特例, 我们有*:*

1. (Kelvin–Stokes) $\iint_S\langle\nabla\times\vec F,\vec n\rangle\,\mathrm{d}\sigma=\int_{\partial S}\langle\vec F,\vec T\rangle\,\mathrm{d}s$
2. (Green) $\iint_D(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y})\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{\partial D}-Q\,\mathrm{d}x+P\,\mathrm{d}y$ 或者 $\int_{\partial D}P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y=\iint_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$
3. (Gauss–Ostrogradsky) $\iiint_\Omega(\nabla\cdot\vec F)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint_{\partial\Omega}\langle\vec F,\vec n\rangle\,\mathrm{d}\sigma$

习题 13.1. 构造一个定义在 $M=\mathbb{R}^3\setminus S^1$ 上的 *1-*形式 τ, 使得 $\mathrm{supp}(\tau)$ 在 $\mathbb{R}^3$ 里有界, 且对任意光滑嵌入 $\gamma:S^1\to M$, 积分 $\int_\gamma\tau$ 可以表达 *"*曲线 γ 穿过圆盘 D^2 的代数次数*"*, 其中从上往下算正次数, 从下往上算负次数. (环绕数)

解. 令 $\omega=\frac{-z\mathrm{d}u+u\mathrm{d}z}{u^2+z^2}\in\Omega^1(M)$, 其中 $u=x^2+y^2-1$. 当 $u\neq 0$ 时, $\omega=\mathrm{d}(\arctan\frac{z}{u})$. 当 $z\neq 0$ 时, $\omega=-\mathrm{d}(\arctan\frac{u}{z})$. 记 $\rho=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, 取截断函数 $\psi:\mathbb{R}^3\to[0,1]$, 使得 $\mathrm{supp}(\psi)\subset\{\rho>2\}$, 并且当 $\rho>3$ 时 $\psi\equiv 1$. 令 $h=\begin{cases}\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{u}{z}, & z>0,\ \rho>2\\ \arctan\frac{z}{u}, & |z|<1,\ \rho>2\\ -\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{u}{z}, & z<0,\ \rho>2\end{cases}$, 则 h 在 $\mathrm{supp}(\psi)$ 上良好定义, 从而

$f = \psi h \in \Omega^0(\mathbb{R}^3)$. 往证 $\tau = \frac{1}{2\pi}(\omega - \mathrm{d}f)$ 满足要求. 当 $\rho > 3$ 时 $\mathrm{d}f = \mathrm{d}h = \omega$, 所以 $\mathrm{supp}(\tau) \subset \{\rho \le 3\}$. 对于闭曲线 γ, 积分的路径无关性表明 $\int_\gamma \mathrm{d}f = 0$, 所以 $\int_\gamma \tau = \frac{1}{2\pi}\int_\gamma \omega$. ////

定义 13.6 (带边流形). 将定义1.5中的图卡 (U, x) 推广成 $x(U)$ 取为 $\mathbb{R}^n_+ = \{(x^1, \dots, x^n) : x^n \ge 0\}$ 中的开集, 则定义1.6中的无边流形推广成**带边流形**.

定义 13.7 (边界和内部). 设 M 是带边流形. 若 $p \in M$ 在某一图卡 (U, x) 中满足 $x^n(p) = 0$, 则 p 称为**边界点**, 否则称为**内点**. 称 $\partial M = \{M\text{ 的边界点}\}$ 为 M 的**边界**, $M^\circ = \{M\text{ 的内点}\}$ 为 M 的**内部**.

注 13.8. 拓扑空间中集合也有边界和内部的概念, 可以根据语境与流形自身的边界和内部进行区分.

命题 13.9. *设 M 是 n 维带边流形, 则 M° 是 n 维无边流形, ∂M 是 $(n-1)$ 维无边流形.*

命题 13.10. *设 M 是带边流形. 若 M 可定向, 则 ∂M 可定向.* (梅加强《流形与几何初步》推论 2.6.7)

定义 13.11 (边界诱导定向). 设 M 是定向 n 维带边流形, 则 ∂M 的**诱导定向**规定如下: 当 $n = 1$ 时, Newton–Leibniz 公式 (微积分基本定理) 成立; 当 $n \ge 2$ 时, 若 M 的定向由 $(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n})$ 决定, 则 ∂M 的定向由 $((-1)^n \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{n-1}})$ 决定. 这里的符号在 Stokes 公式 (定理13.18) 中用到.

定义 13.12 (积分区域). 光滑流形 M 中的**积分区域**指的是内部 D° 非空的闭集 D, 使其存在有定向的开邻域 $W \subset M$, 从而 D *有预设定向*.

定义 13.13 (正则图卡). 设 D 是 n 维光滑流形 M 中的积分区域, M 的图卡 (U, x) 与 D 定向相容. 称 (U, x) 为 D 的 **(内) 正则图卡**, 若 $U \subset D^\circ$. 称 (U, x) 为 D 的**边界正则图卡**, 若 U 与 ∂D 交集非空, $U \cap D = \{q \in U : x^n(q) \ge 0\}$, 且 $U \cap \partial D = \{q \in U : x^n(q) = 0\}$.

定义 13.14 (正则边界). 设 D 是积分区域. 若 $p \in \partial D$ 在某个边界正则图卡中, 则 p 称为**正则边界点**, 否则称为**非正则边界点**. 将 D 的正则边界点构成的集合记为 $\partial_+ D$, 称为 D 的**正则边界**.

命题 13.15. *设 D 是积分区域, 则 $D^\circ \cup \partial_+ D$ 构成定向带边流形, 并且 $\partial(D^\circ \cup \partial_+ D) = \partial_+ D$.*

定义 13.16 (正则积分区域). 设 D 是 n 维流形中的积分区域. 如果 $\partial D = \partial_+ D$, 则称 D 为**正则积分区域**. 如果 $\partial D \setminus \partial_+ D$ 是 $(n-1)$ 维零测集, 则称 D 为**几乎正则积分区域**.

命题 13.17. *设 M 是定向带边流形. 若 ∂M 紧, 则存在无边流形 N 使得 M 为其正则积分区域.*

证明. 取 $N = M \cup_f M$ 为 $M \supset \partial M \hookrightarrow M$ 的黏着空间, 其中 $f : p \in \partial M \mapsto p \in M$. □

定理 13.18 (Stokes). *设 N 是 M 的 n 维光滑子流形, D 是 N 中的几乎正则积分区域.*

若 $\omega \in \Omega^{n-1}(M)$ 有紧支, 则 $\boxed{\int_D \mathrm{d}\omega = \int_{\partial D} \omega}$. 注意 $\mathrm{supp}(\omega) \cap D$ 是 N 中紧集.

证明. 利用命题12.16, 结论可写成 $\int_{D^\circ} \mathrm{d}\omega = \int_{\partial_+ D} \omega$, 因而只需处理 ω 在 $S = D^\circ \cup \partial_+ D$ 上的限制. 对于 S 的开覆盖 $\{D\text{ 的内正则图卡}\} \cup \{(D\text{ 的边界正则图卡}) \cap S\}$, 取一个从属于它的单位分解 $\{\rho_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$, 则 $\omega|_S = \sum_{\lambda \in \Lambda} \rho_\lambda \omega|_S$. 对每个 $\omega_\lambda = \rho_\lambda \omega|_S$ 证明 $\int_{D^\circ} \mathrm{d}\omega_\lambda = \int_{\partial_+ D} \omega_\lambda$ 即可, 这分为 2 种情况:

(I) 存在内正则图卡 (U, x) 包含 $\mathrm{supp}(\omega_\lambda)$. 此时 $\mathrm{supp}(\omega_\lambda) \cap \partial_+ D = \emptyset$, 从而 $\int_{\partial_+ D} \omega_\lambda = 0$. 表 $\omega_\lambda = \sum_i f_i \, \mathrm{d}x^{1, \cdots, i-1, i+1, \cdots, n}$, 其中 f_i 是紧支光滑函数, 则 $\mathrm{d}\omega_\lambda = \sum_i (-1)^{i-1} \frac{\partial f_i}{\partial x^i} \mathrm{d}x^{1, \cdots, n}$, 进而

$$\begin{aligned}\int_{D^\circ} \mathrm{d}\omega_\lambda &= \int_U \mathrm{d}\omega_\lambda = \int_{\mathbb{R}^n} \sum_i (-1)^{i-1} \partial_i (f_i \circ x^{-1}) \, \mathrm{d}x^1 \cdots \mathrm{d}x^n \\ &= \sum_i (-1)^{i-1} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \Big(\underbrace{\int_{\mathbb{R}} \partial_i (f_i \circ x^{-1}) \, \mathrm{d}x^i}_{= f_i \circ x^{-1}|_{x_i = -\infty}^{+\infty} = 0 - 0 = 0} \Big) \mathrm{d}x^1 \cdots \mathrm{d}x^{i-1} \mathrm{d}x^{i+1} \cdots \mathrm{d}x^n = 0.\end{aligned}$$

(II) 存在边界正则图卡 (U,x) 包含 $\operatorname{supp}(\omega_\lambda)$. 表 $\omega_\lambda=\sum_i f_i\,\mathrm{d}x^{1,\cdots,i-1,i+1,\cdots,n}$, 其中 f_i 是紧支光滑函数, 则 $\mathrm{d}\omega_\lambda=\sum_i(-1)^{i-1}\frac{\partial f_i}{\partial x^i}\,\mathrm{d}x^{1,\cdots,n}$, 进而

$$
\begin{aligned}
\int_{D^\circ}\mathrm{d}\omega_\lambda = \int_U \mathrm{d}\omega_\lambda &= \int_{\mathbb{R}^n_+}\sum_i(-1)^{i-1}\partial_i(f_i\circ x^{-1})\,\mathrm{d}x^1\cdots\mathrm{d}x^n\\
&=(-1)^{n-1}\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\big(\overbrace{\int_{\mathbb{R}_+}\partial_n(f_n\circ x^{-1})\,\mathrm{d}x^n}^{=f_n\circ x^{-1}|_{x_n=0}^{+\infty}}\big)\,\mathrm{d}x^1\cdots\mathrm{d}x^{n-1}\\
&\quad+\sum_{i<n}(-1)^{i-1}\int_{\mathbb{R}^{n-1}_+}\big(\underbrace{\int_{\mathbb{R}}\partial_i(f_i\circ x^{-1})\,\mathrm{d}x^i}_{=f_i\circ x^{-1}|_{x_i=-\infty}^{+\infty}=0}\big)\,\mathrm{d}x^1\cdots\mathrm{d}x^{i-1}\mathrm{d}x^{i+1}\cdots\mathrm{d}x^n\\
&=(-1)^n\int_{\mathbb{R}^{n-1}}f_n\circ x^{-1}(x^1,\ldots,x^{n-1},0)\,\mathrm{d}x^1\cdots\mathrm{d}x^{n-1}=\int_{U\cap\partial_+D}\omega_\lambda=\int_{\partial_+D}\omega_\lambda.
\end{aligned}
$$

注. 考虑 $D=N=M$, 即知 Stokes 公式对定向带边流形成立. □

习题 13.2. *设 $\iota:\mathbb{R}^n\hookrightarrow M$ 是光滑嵌入. 考虑 M 上的紧支 n-形式 ω, 记 $\iota^*(\omega)=f\,\mathrm{d}x^{1,\cdots,n}$. 我们希望得到 $\int_{\iota(\overline{U})}\omega=\int_{\iota(U)}\omega$, 其中 U 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界开集, $\partial U=\overline{U}\backslash U$ 是 n 维零测集. 为此, 任取一列光滑函数 $\rho_k:\mathbb{R}^n\to[0,1]$ 适合 $\operatorname{supp}(\rho_k)\subset U$ 且 $\lim\limits_{k\to\infty}\rho_k|_U\equiv 1$, 证明 $\lim\limits_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n}\rho_k\iota^*(\omega)=\int_U f(x)\,\mathrm{d}x^1\cdots\mathrm{d}x^n$.*

证明. 逐点成立 $\rho_k f\to f\mathbb{1}_U$, 且 $|\rho_k f|\le|f|$ 在紧集 $\overline{U}$ 上有界, 于是应用控制收敛定理即可. ■

习题 13.3. *设 M 是定向 n 维无边流形, ω 是 M 上的 k-形式. 证明:*

(a) 如果任意紧支 $(n-k)$-形式 α 都满足 $\int_M\omega\wedge\alpha=0$, 则 $\omega\equiv 0$.

(b) 如果任意紧支 $(n-k-1)$-形式 β 都满足 $\int_M\omega\wedge\mathrm{d}\beta=0$, 则 $\mathrm{d}\omega\equiv 0$.

证明. (a) 假设 $\omega\neq 0$, 则存在图卡 (U,x) 使得 $\omega(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}},\ldots,\frac{\partial}{\partial x^{i_k}})$ 不全为零. 不妨 $\omega(\frac{\partial}{\partial x^1},\ldots,\frac{\partial}{\partial x^k})=h$ 非零, 然后取出 $\{p\in U:h(p)\neq 0\}$ 的一个非空开子集 V, 使得 $\overline{V}\subset U$. 考虑 $\alpha=\psi h\,\mathrm{d}x^{k+1,\cdots,n}$, 其中 $\psi:M\to[0,1]$ 是截断函数, 适合 $\psi|_V\equiv 1$ 和 $\operatorname{supp}(\psi)\subset U$. 我们有 $\omega\wedge\alpha=\psi h^2\,\mathrm{d}x^{1,\cdots,n}$, 其中 $\psi h^2\ge h^2\mathbb{1}_V$ 在 V 上严格大于零, 这蕴涵 $\int_M\omega\wedge\alpha=\int_U\psi h^2\,\mathrm{d}x^{1,\cdots,n}\ge\int_V h^2\,\mathrm{d}x^{1,\cdots,n}>0$.

(b) 我们有 $\mathrm{d}(\omega\wedge\beta)=(\mathrm{d}\omega)\wedge\beta+(-1)^k\omega\wedge\mathrm{d}\beta$, 从而根据题设可得 $\int_M(\mathrm{d}\omega)\wedge\beta=\int_M\mathrm{d}(\omega\wedge\beta)=\int_{\partial M}\omega\wedge\beta=0$, 其中用到 $\partial M=\emptyset$. 由 (a) 即证. ■

习题 13.4. *设 D 是 $\mathbb{R}^n$ 中的紧致的正则积分区域, $\vec{F}=F^k\frac{\partial}{\partial x^k}$ 是定义在 D 的一个开邻域上的光滑切向量场, $i:\partial D\to\mathbb{R}^n$ 是含入映射.*

(a) 证明 $i^*(\sum_{k=1}^n(-1)^{k-1}F^k\,\mathrm{d}x^{1,\cdots,k-1,k+1,\cdots,n})=\langle\vec{F},\vec{n}\rangle\,\mathrm{d}\sigma$, 其中 $\mathrm{d}\sigma$ 表示 ∂D 上的体积形式, $\vec{n}:\partial D\to T\mathbb{R}^n$ 在点 p 处取值为 $T_p\mathbb{R}^n$ 中指向 D 外侧的单位长度法向量.

*(b) 证明**散度定理** $\int_D\operatorname{div}(\vec{F})\,\mathrm{d}\mu=\int_{\partial D}\langle\vec{F},\vec{n}\rangle\,\mathrm{d}\sigma$, 其中 $\mathrm{d}\mu$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的体积形式, $\operatorname{div}(\vec{F})=\frac{\partial}{\partial x^k}F^k$.*

(c) 把 $\mathbb{R}^n$ 换成一般的定向 Riemann 流形 (M,g), 推广 (b). 关于散度 div, 回顾习题 7.3.

证明. (a) 注意 $\sum_{k=1}^n(-1)^{k-1}F^k\,\mathrm{d}x^{1,\cdots,k-1,k+1,\cdots,n}=\iota_{\vec{F}}(\mathrm{d}\mu)$, 其中 $\mathrm{d}\mu=\mathrm{d}x^{1,\cdots,n}$. 任取 ∂D 的局部正交标架场 $\{\xi_k\}_{k=1}^{n-1}$, 有 $\vec{F}=\langle\vec{F},\vec{n}\rangle\vec{n}+\sum_{k=1}^{n-1}\langle\vec{F},\xi_k\rangle\xi_k$, 进而 $\langle\iota_{\vec{F}}(\mathrm{d}\mu),\xi_1,\ldots,\xi_{n-1}\rangle=\langle\mathrm{d}\mu,\vec{F},\xi_1,\ldots,\xi_{n-1}\rangle=\langle\vec{F},\vec{n}\rangle\langle\mathrm{d}\mu,\vec{n},\xi_1,\ldots,\xi_{n-1}\rangle=\langle\vec{F},\vec{n}\rangle(-1)^n\langle\mathrm{d}\mu,\xi_1,\ldots,\xi_{n-1},-\vec{n}\rangle=\langle\vec{F},\vec{n}\rangle\langle\mathrm{d}\sigma,\xi_1,\ldots,\xi_{n-1}\rangle$.

(b) 由于 $\operatorname{div}(\vec{F})\,\mathrm{d}\mu=\mathrm{d}(\iota_{\vec{F}}(\mathrm{d}\mu))$, Stokes 公式给出 $\int_D\operatorname{div}(\vec{F})\,\mathrm{d}\mu=\int_{\partial D}i^*(\iota_{\vec{F}}(\mathrm{d}\mu))$, 结合 (a) 即可.

(c) 把 $\mathrm{d}\mu$ 换成 M 上的体积形式 V, 照搬上述证明立得 $\int_D\operatorname{div}(\vec{F})V=\int_{\partial D}g(\vec{F},\vec{n})\,\mathrm{d}\sigma$. ■

14 de Rham 上同调 (2021 年 5 月 26 日)

定义 14.1 (de Rham 复形). $\Omega^0\xrightarrow{\mathrm{d}}\Omega^1\xrightarrow{\mathrm{d}}\Omega^2\xrightarrow{\mathrm{d}}\cdots$, 其中外微分算子 d 满足 $\mathrm{d}^2=0$.

定义 14.2 (闭形式)**.** 设 ω 是 k-形式. 若 $\mathrm{d}\omega = 0$, 则称 ω **闭**.

定义 14.3 (恰当形式)**.** 设 ω 是 k-形式. 若存在 $(k-1)$-形式 θ 使得 $\omega = \mathrm{d}\theta$, 则称 ω **恰当**.

注 14.4. 恰当形式都是闭形式. 闭形式不一定是恰当形式, 比如 $\mathbb{R}^2 \setminus \{0_2\}$ 上的 $\frac{-y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$.

定义 14.5 (de Rham 上同调)**.** 记 $Z^k(M) = \ker\big(\mathrm{d} : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)\big) = \{闭\,\omega \in \Omega^k(M)\}$ 和 $B^k(M) = \mathrm{im}\big(\mathrm{d} : \Omega^{k-1}(M) \to \Omega^k(M)\big) = \{恰当\,\omega \in \Omega^k(M)\}$, 则 M 的第 k 个 **de Rham 上同调群**为线性空间的商空间 $H^k_{\mathrm{dR}}(M) = Z^k(M)/B^k(M)$, 其中的元素称为 **de Rham 上同调类**.
给 $H^\bullet_{\mathrm{dR}}(M) = \bigoplus_{k=0}^\infty H^k_{\mathrm{dR}}(M)$ 配备外积, 则得到 **de Rham 上同调环**.

命题 14.6. *任取 $[\alpha] \in H^k_{\mathrm{dR}}(M)$ 和 $[\beta] \in H^\ell_{\mathrm{dR}}(M)$, 它们的外积 $[\alpha] \wedge [\beta] = [\alpha \wedge \beta]$ 良好定义.*

证明. $\mathrm{d}(\alpha \wedge \beta) = (\mathrm{d}\alpha) \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge \mathrm{d}\beta = 0 \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge 0 = 0$, 且
$$(\alpha + \mathrm{d}\theta) \wedge (\beta + \mathrm{d}\phi) = \alpha \wedge \beta + \mathrm{d}((-1)^k \alpha \wedge \phi + \theta \wedge \beta + \theta \wedge \mathrm{d}\phi).$$ □

注 14.7. $\dim H^0_{\mathrm{dR}}(M) = \dim Z^0(M) = \#\{M\,的连通分支\}$.

定理 14.8 (de Rham)**.** *$H^\bullet_{\mathrm{dR}}(M) \cong H^\bullet_{\mathrm{sing}}(M; \mathbb{R})$, 其中 $H^\bullet_{\mathrm{sing}}(M; \mathbb{R})$ 是实系数奇异上同调环.*

推论 14.9. *Betti 数 $\beta_k = \dim H^k$ 和 Euler 数 $\chi = \sum(-1)^k \beta_k$ 是不变量.*

命题 14.10. *光滑映射 $f : M \to N$ 诱导线性映射 $f^* : [\omega] \in H^k_{\mathrm{dR}}(N) \mapsto [f^*(\omega)] \in H^k_{\mathrm{dR}}(M)$. 进一步地, 若 f 是同胚, 则 $f^* : H^k_{\mathrm{dR}}(N) \to H^k_{\mathrm{dR}}(M)$ 是线性同构.*

命题 14.11 (de Rham 上同调的同伦不变性)**.** *若 $f : M \to N$ 是同伦等价, 即存在同伦逆 $g : N \to M$ 使得 $g \circ f \simeq \mathrm{Id}_M$ 且 $f \circ g \simeq \mathrm{Id}_N$, 则 $f^* : H^\bullet_{\mathrm{dR}}(N) \to H^\bullet_{\mathrm{dR}}(M)$ 是线性同构.*

证明. 由命题14.15即得. □

注 14.12. 连续映射总是同伦于光滑映射; 光滑映射之间的同伦总是可以光滑化.
(Thm. 6.26 & 6.29 in Lee's Introduction to Smooth Manifolds)

注 14.13. 形变收缩是含入映射的同伦逆, 所以只需考虑形变收缩核的 de Rham 上同调.

推论 14.14 (Poincaré 引理)**.** $H^k_{\mathrm{dR}}(\mathbb{R}^n) \cong H^k_{\mathrm{dR}}(\mathrm{pt}) = \begin{cases} \mathbb{R}, & k = 0; \\ 0, & k \geq 1. \end{cases}$

命题 14.15. *若 $f_0 \simeq f_1 : M \to N$, 则 $f_0^* = f_1^* : H^\bullet_{\mathrm{dR}}(N) \to H^\bullet_{\mathrm{dR}}(M)$.*

证明. 设 $F : M \times [0,1] \to N$ 是从 f_0 到 f_1 的伦移, 则 $f_t = F \circ i_t$, 其中 $i_t : x \in M \mapsto (x,t) \in M \times [0,1]$. 任取 N 上的闭形式 ω, 欲说明 $f_1^*\omega - f_0^*\omega = (i_1^* - i_0^*)F^*\omega$ 是恰当形式, 只需存在 (线性的) 同伦算子 $T : \Omega^\bullet(M \times [0,1]) \to \Omega^{\bullet-1}(M)$, 使得 $i_1^* - i_0^* = \mathrm{d} \circ T + T \circ \mathrm{d}$. 一个可行的构造是沿纤维积分, 定义为 $T : a_I\, \mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}x^I + b_J\, \mathrm{d}x^J \mapsto (\int_0^1 a_I(x,t)\, \mathrm{d}t)\, \mathrm{d}x^I$. □

命题 14.16 (积分的同伦不变性)**.** *若 $f_0 \simeq f_1 : M \to N$ rel ∂M, 其中 M 是定向 m 维带边流形, 则对 $\forall \omega \in Z^m(N)$, 有 $\int_M f_0^*\omega = \int_M f_1^*\omega$.*

证明. 设 $F : M \times [0,1] \to N$ 是从 f_0 到 f_1 的伦移, 使得 $F(x,t) = f_0(x) = f_1(x), \forall (x,t) \in (\partial M) \times [0,1]$. 在 $M \times [0,1]$ 上积分 $\mathrm{d}(F^*\omega) = F^*\mathrm{d}\omega = 0$ 并应用 Stokes 定理, 则有 $(\int_{(\partial M)\times[0,1]} + \int_{M \times \partial[0,1]})F^*\omega = 0$, 其中 $\int_{M\times\partial[0,1]} F^*\omega = \int_M f_1^*\omega - \int_M f_0^*\omega$. 往证 $(F^*\omega)|_{(\partial M)\times[0,1]} = 0 \in \Omega^{m-1}(\partial M) \otimes \mathrm{span}(\{\mathrm{d}t\})$. 只需 $\iota_{\frac{\partial}{\partial t}}(F^*\omega) = F^*(\iota_{F_*(\frac{\partial}{\partial t})}(\omega))$ 在 $(\partial M) \times [0,1]$ 上为零, 而 $F_*(\frac{\partial}{\partial t}|_{(\partial M)\times[0,1]}) \equiv 0$. □

命题 14.17. 设 M 是连通的 n 维闭流形 (紧致且无边). 若 M 可定向, 则 $[\omega]\in H^n_{\mathrm{dR}}(M)\mapsto\int_M\omega\in\mathbb{R}$ 是良定义的同构, 即得 $H^n_{\mathrm{dR}}(M)\cong\mathbb{R}^1$. 若 M 不可定向, 则 $H^n_{\mathrm{dR}}(M)=0$.

(Thm. 17.30+17.31 & 17.34 in Lee's Introduction to Smooth Manifolds)

习题 14.1. 设 M 是 $\mathbb{R}^3$ 中由 $F(x,y,z)=0$ 决定的光滑隐函数曲面, 其中 J_F 在 M 的一个开邻域上处处非零. 令 $i:M\hookrightarrow\mathbb{R}^3$ 为含入映射. 任取 $\mathbb{R}^3$ 上的 1-形式 $\omega=u\mathrm{d}x+v\mathrm{d}y+w\mathrm{d}z$, 如何判断 $i^*(\omega)$ 是否闭以及是否恰当?

解. 当 $\frac{\partial F}{\partial x}\neq 0$ 时, 令 $V=(\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z)/\frac{\partial F}{\partial x}$; 当 $\frac{\partial F}{\partial y}\neq 0$ 时, 令 $V=(\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x)/\frac{\partial F}{\partial y}$; 当 $\frac{\partial F}{\partial z}\neq 0$ 时, 令 $V=(\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y)/\frac{\partial F}{\partial z}$; 在 M 上, 由 $0=\mathrm{d}F=\frac{\partial F}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial F}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial F}{\partial z}\mathrm{d}z$ 可知 V 良好定义. 我们有 $\mathrm{d}\omega=\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y+\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x=[\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)\frac{\partial F}{\partial z}+\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\right)\frac{\partial F}{\partial x}+\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right)\frac{\partial F}{\partial y}]V$, 所以 $i^*(\omega)$ 闭当且仅当在 M 上 $\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)\frac{\partial F}{\partial z}+\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\right)\frac{\partial F}{\partial x}+\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right)\frac{\partial F}{\partial y}=0$. 一般地, 流形 M 上的 1-形式是恰当的当且仅当积分与路径无关, 即沿任意闭道路 $\gamma:S^1\to M$ 积分为零, 必要性是显然的, 证明充分性只需在每个连通分支上利用曲线积分得到良定义的原函数. ////

习题 14.2. 在 $\mathbb{R}^n\backslash\{0_n\}$ 上定义 $(n-1)$-形式 $\omega=\sum_{i=1}^n(-1)^ix^i\,\mathrm{d}x^{1,\cdots,i-1,i+1,\cdots,n}/[(x^1)^2+\cdots+(x^n)^2]^{m/2}$. 求常数 m 使得 ω 闭, 并且说明 ω 不恰当.

解. 记 $\rho=\sqrt{(x^1)^2+\cdots+(x^n)^2}$. 直接计算可得 $\mathrm{d}\omega=(m-n)\rho^{-m}\,\mathrm{d}x^{1,\cdots,n}$, 于是应取 $m=n$. 将 n 维单位闭球记为 D^n, 则 $\int_{S^{n-1}}\omega=\int_{S^{n-1}}\sum_{i=1}^n(-1)^ix^i\,\mathrm{d}x^{1,\cdots,i-1,i+1,\cdots,n}=\int_{D^n}(-n)\,\mathrm{d}x^{1,\cdots,n}<0$. 假设存在 $\alpha\in\Omega^{n-2}(\mathbb{R}^n\setminus\{0_n\})$ 使得 $\omega=\mathrm{d}\alpha$, 则 $\int_{S^{n-1}}\omega=\int_{\partial S^{n-1}}\alpha=0$ 导致矛盾, 其中用到 $\partial S^{n-1}=\emptyset$. ////

习题 14.3. 将 M 上所有紧支 k-形式构成的线性空间记为 $\Omega^k_c(M)$. 令 $Z^k_c(M)=Z^k(M)\cap\Omega^k_c(M)$ 和 $B^k_c(M)=B^k(M)\cap\Omega^k_c(M)$. 称 $H^k_c(M)=Z^k_c(M)/B^k_c(M)$ 为 M 的第 k 个**紧支 de Rham 上同调群**. 证明 $H^n_c(\mathbb{R}^n)\cong\mathbb{R}$, 而当 $k\neq n$ 时 $H^k_c(\mathbb{R}^n)=0$.

注. 紧支 de Rham 上同调没有同伦不变性.

证明. 因为 $H^0_c=Z^0_c=\{$紧支常值函数$\}$, 当 $n=0$ 或 $k=0$ 时结论成立. 往证 $H^{\bullet+1}_c(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)\cong H^\bullet_c(\mathbb{R}^n)$. 定义 $\pi:a_I\,\mathrm{d}t\wedge\mathrm{d}x^I+b_J\,\mathrm{d}x^J\in\Omega^{\bullet+1}_c(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)\mapsto\left(\int_{\mathbb{R}}a_I(t,x)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x^I\in\Omega^\bullet_c(\mathbb{R}^n)$, 其中 a_I 和 b_J 是紧支函数. 定义 $\sigma:\omega\in\Omega^\bullet_c(\mathbb{R}^n)\mapsto\varphi(t)\mathrm{d}t\wedge\omega\in\Omega^{\bullet+1}_c(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$, 其中 φ 是紧支函数, 适合 $\int_{\mathbb{R}}\varphi(t)\,\mathrm{d}t=1$. 不难发现 π 和 σ 均与 d 可交换, 从而诱导同态 $H^{\bullet+1}_c(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)\underset{\sigma}{\overset{\pi}{\rightleftharpoons}}H^\bullet_c(\mathbb{R}^n)$, 下证这是同构. 一方面, 由 $\pi\circ\sigma=\mathrm{Id}_{\Omega^\bullet_c(\mathbb{R}^n)}$ 可得 $\pi\circ\sigma=\mathrm{Id}_{H^\bullet_c(\mathbb{R}^n)}$. 另一方面, 为说明 $\sigma\circ\pi=\mathrm{Id}_{H^{\bullet+1}_c(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)}$, 只需存在 (线性的) 同伦算子 $T:\Omega^{\bullet+1}_c(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)\to\Omega^\bullet_c(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$, 使得 $\sigma\circ\pi=\mathrm{Id}_{\Omega^{\bullet+1}_c(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)}\pm\mathrm{d}\circ T\pm T\circ\mathrm{d}$; 比如可以取 $T:a_I\,\mathrm{d}t\wedge\mathrm{d}x^I+b_J\,\mathrm{d}x^J\mapsto\left(\int_{-\infty}^t a_I(s,x)\,\mathrm{d}s-\int_{\mathbb{R}}a_I(u,x)\,\mathrm{d}u\int_{-\infty}^t\varphi(s)\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}x^I$. ■

15 Hodge 理论 (2021 年 5 月 28 日)

定义 15.1 (Hodge 星算子)**.** 在定向 Riemann 流形上, 设 $(\theta^1,\ldots,\theta^n)$ 是局部正交标架场的对偶余标架场. **Hodge 星算子**为线性同构 $\star:\Omega^k\to\Omega^{n-k}$, 适合 $\star(\theta^{i_1}\wedge\cdots\wedge\theta^{i_k})=\varepsilon_{(i_1,\ldots,i_n)}\theta^{i_{k+1}}\wedge\cdots\wedge\theta^{i_n}$, 其中 $(i_1,\ldots,i_n)$ 是 n-置换, $i_1<\cdots<i_k$ 且 $i_{k+1}<\cdots<i_n$.

命题 15.2. 设 (U,x) 是 (M,g) 的正定向的图卡, 则 $\star(\mathrm{d}x^{i_1,\ldots,i_k})=\frac{\sqrt{\det(g)}}{(n-k)!}g^{i_1j_1}\cdots g^{i_kj_k}\varepsilon_{(j_1,\ldots,j_n)}\mathrm{d}x^{j_{k+1},\ldots,j_n}$.

注 15.3. Hodge 星算子不依赖标架场的选取, 并且是光滑映射.

命题 15.4. $\star\star\omega=(-1)^{k(n-k)}\omega$.

定义 15.5 (余微分). $\delta=(-1)^k\star^{-1}\mathrm{d}\star:\Omega^k\to\Omega^{k-1}$.

命题 15.6. (1) $\delta^2=0$. (2) $\star\delta\mathrm{d}=\mathrm{d}\delta\star$, $\star\mathrm{d}\delta=\delta\mathrm{d}\star$.

定义 15.7 (余 ·· 形式). 称 $\ker(\delta)$ 中的微分形式为**余闭**的. 称 $\mathrm{im}(\delta)$ 中的微分形式为**余恰当**的.

命题 15.8. *若 ω 是闭形式, 则 $\star\omega$ 是余闭形式. 若 ω 是余闭形式, 则 $\star\omega$ 是闭形式.*

定义 15.9. $\langle\langle\omega,\theta\rangle\rangle_M=\int_M\omega\wedge\star\theta$, 其中 ω 和 θ 是 M 上同阶的微分形式.

命题 15.10. *设 M 是定向的紧 Riemann 流形, 则 $\langle\langle\bullet,\bullet\rangle\rangle_M$ 是 $\Omega^k(M)$ 上的*内积.

引理 15.11. *设 M 是定向的闭 Riemann 流形, 则 $\langle\langle\mathrm{d}\omega,\theta\rangle\rangle_M=\langle\langle\omega,\delta\theta\rangle\rangle_M$.*

证明. $\mathrm{d}(\omega\wedge\star\theta)=(\mathrm{d}\omega)\wedge\star\theta-\omega\wedge\star\delta\theta$. □

定义 15.12 (Hodge–Laplace 算子). $\tilde{\Delta}=\delta\mathrm{d}+\mathrm{d}\delta:\Omega^k\to\Omega^k$.

定义 15.13 (调和形式). 称 $\ker(\tilde{\Delta})$ 中的微分形式为**调和**的.

命题 15.14. *设 ω 是定向的闭 Riemann 流形上的微分形式, 则 ω 调和当且仅当 ω 既闭又余闭.*

证明. $\langle\langle\tilde{\Delta}\omega,\omega\rangle\rangle_M=\langle\langle\mathrm{d}\omega,\mathrm{d}\omega\rangle\rangle_M+\langle\langle\delta\omega,\delta\omega\rangle\rangle_M$. □

推论 15.15 (Liouville 定理). *定向的闭 Riemann 流形上的调和函数在每个连通分支上是常值.*

定理 15.16 (Hodge). *设 M 是定向的闭 Riemann 流形. 任取 $\omega\in Z^k(M)$, 存在唯一的调和形式 $\omega_{\tilde{\Delta}}$ 使得 $[\omega_{\tilde{\Delta}}]=[\omega]\in H^k_{\mathrm{dR}}(M)$. 若 $\omega\neq\omega_{\tilde{\Delta}}$, 则 $\langle\langle\omega,\omega\rangle\rangle_M>\langle\langle\omega_{\tilde{\Delta}},\omega_{\tilde{\Delta}}\rangle\rangle_M$.*

推论 15.17 (Hodge 对偶定理). *设 M 是定向 n 维闭 Riemann 流形, 则 Hodge 星算子把调和 k-形式变为调和 $(n-k)$-形式, 从而 $H^k_{\mathrm{dR}}(M)\cong H^{n-k}_{\mathrm{dR}}(M)$.*

定理 15.18 (Hodge 分解). *设 ω 是定向的闭 Riemann 流形上的微分形式, 则 ω 可以唯一地表示成 $\omega=\mathrm{d}\alpha+\delta\beta+\omega_{\tilde{\Delta}}$, 其中 $\omega_{\tilde{\Delta}}$ 是调和形式.*

习题 15.1. *计算 $\mathbb{R}^3$ 里的余微分和 Hodge–Laplace 算子.*

解. 记 $\omega_1=a\,\mathrm{d}x+b\,\mathrm{d}y+c\,\mathrm{d}z$, $\omega_2=a\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+b\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+c\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$, $V=\star1=\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z$.

$$\delta\omega_1=-\star^{-1}(\mathrm{d}\omega_2)=-\star^{-1}\left(\left(\tfrac{\partial a}{\partial x}+\tfrac{\partial b}{\partial y}+\tfrac{\partial c}{\partial z}\right)V\right)=-\left(\tfrac{\partial a}{\partial x}+\tfrac{\partial b}{\partial y}+\tfrac{\partial c}{\partial z}\right).$$

$$\begin{aligned}\delta\omega_2&=\star^{-1}(\mathrm{d}\omega_1)=\star^{-1}\left(\left(\tfrac{\partial b}{\partial x}-\tfrac{\partial a}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y+\left(\tfrac{\partial c}{\partial y}-\tfrac{\partial b}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+\left(\tfrac{\partial a}{\partial z}-\tfrac{\partial c}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x\right)\\&=\left(\tfrac{\partial c}{\partial y}-\tfrac{\partial b}{\partial z}\right)\mathrm{d}x+\left(\tfrac{\partial a}{\partial z}-\tfrac{\partial c}{\partial x}\right)\mathrm{d}y+\left(\tfrac{\partial b}{\partial x}-\tfrac{\partial a}{\partial y}\right)\mathrm{d}z.\end{aligned}$$

$$\delta(fV)=-\star^{-1}(\mathrm{d}f)=-\star^{-1}\left(\tfrac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x+\tfrac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y+\tfrac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z\right)=-\left(\tfrac{\partial f}{\partial z}\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y+\tfrac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+\tfrac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x\right).$$

$$\tilde{\Delta}f=\delta(\mathrm{d}f)=\delta\left(\tfrac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x+\tfrac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y+\tfrac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z\right)=-\left(\tfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\tfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\tfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right).$$

$$\begin{aligned}\tilde{\Delta}\omega_1&=\delta\left(\left(\tfrac{\partial c}{\partial y}-\tfrac{\partial b}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+\left(\tfrac{\partial a}{\partial z}-\tfrac{\partial c}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+\left(\tfrac{\partial b}{\partial x}-\tfrac{\partial a}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\right)-\mathrm{d}\left(\tfrac{\partial a}{\partial x}+\tfrac{\partial b}{\partial y}+\tfrac{\partial c}{\partial z}\right)\\&=-\left(\tfrac{\partial^2 a}{\partial x^2}+\tfrac{\partial^2 a}{\partial y^2}+\tfrac{\partial^2 a}{\partial z^2}\right)\mathrm{d}x-\left(\tfrac{\partial^2 b}{\partial x^2}+\tfrac{\partial^2 b}{\partial y^2}+\tfrac{\partial^2 b}{\partial z^2}\right)\mathrm{d}y-\left(\tfrac{\partial^2 c}{\partial x^2}+\tfrac{\partial^2 c}{\partial y^2}+\tfrac{\partial^2 c}{\partial z^2}\right)\mathrm{d}z=(\tilde{\Delta}a)\,\mathrm{d}x+(\tilde{\Delta}b)\,\mathrm{d}y+(\tilde{\Delta}c)\,\mathrm{d}z.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\Delta}\omega_2&=\delta\left(\left(\tfrac{\partial a}{\partial x}+\tfrac{\partial b}{\partial y}+\tfrac{\partial c}{\partial z}\right)V\right)+\mathrm{d}\left(\left(\tfrac{\partial c}{\partial y}-\tfrac{\partial b}{\partial z}\right)\mathrm{d}x+\left(\tfrac{\partial a}{\partial z}-\tfrac{\partial c}{\partial x}\right)\mathrm{d}y+\left(\tfrac{\partial b}{\partial x}-\tfrac{\partial a}{\partial y}\right)\mathrm{d}z\right)\\&=(\tilde{\Delta}a)\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+(\tilde{\Delta}b)\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+(\tilde{\Delta}c)\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

$$\tilde{\Delta}(fV)=-\mathrm{d}\left(\tfrac{\partial f}{\partial z}\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y+\tfrac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+\tfrac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x\right)=(\tilde{\Delta}f)V.$$

////

习题 15.2. *设 (M,g) 是定向 Riemann 流形, f 是 M 上的光滑函数.*

(a) 设 $(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ 是 M 上的正交标架场, 其对偶余标架场为 $(\theta^1,\ldots,\theta^n)$. 求 $\delta(f\,\theta^1\wedge\cdots\wedge\theta^k)$.

(b) 设 (U,x) 是 M 的正定向图卡. 求 $\delta(f\,\mathrm{d}x^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^k)$.

解. 记 $\theta^{i_1,\ldots,i_k}=\theta^{i_1}\wedge\cdots\wedge\theta^{i_k}$ 和 $\mathrm{d}x^{i_1,\ldots,i_k}=\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_k}$. 用 $\hat{\ell}$ 表示删去 ℓ.

(a) 我们有 $\mathrm{d}f=\xi_i(f)\theta^i$ 和 $\mathrm{d}\theta^\ell=-\sum_{i<j}C_{ij}^\ell\theta^{ij}$, 其中函数 C_{ij}^ℓ 由 $[\xi_i,\xi_j]=C_{ij}^\ell\xi_\ell$ 决定, 于是

$$\begin{aligned}
&\delta(f\theta^{1,\cdots,k})=(-1)^k\star^{-1}\mathrm{d}(f\theta^{k+1,\cdots,n})\\
&=(-1)^k\star^{-1}\Big(\xi_i(f)\theta^i\wedge\theta^{k+1,\cdots,n}+f\sum_{\ell>k}\sum_{i<j}(-1)^{\ell-k}C_{ij}^\ell\theta^{ij}\wedge\theta^{k+1,\cdots,\hat{\ell},\cdots,n}\Big)\\
&=(-1)^k\star^{-1}\Big(\sum_{i\le k}\Big(\xi_i(f)-f\sum_{\ell>k}C_{i\ell}^\ell\Big)\theta^i\wedge\theta^{k+1,\cdots,n}+f\sum_{\ell>k}\sum_{i<j\le k}C_{ij}^\ell(-1)^{\ell-k}\theta^{ij}\wedge\theta^{k+1,\cdots,\hat{\ell},\cdots,n}\Big)\\
&=\sum_{i\le k}\Big(\xi_i(f)-f\sum_{\ell>k}C_{i\ell}^\ell\Big)(-1)^i\theta^{1,\cdots,\hat{i},\cdots,k}+f\sum_{\ell>k}\sum_{i<j\le k}C_{ij}^\ell(-1)^{(j-i)+k}\theta^{1,\cdots,\hat{i},\cdots,\hat{j},\cdots,k}\wedge\theta^\ell.
\end{aligned}$$

(b) 设 $\delta(f\mathrm{d}x^{1,\cdots,k})=\sum_{i_1<\cdots<i_{k-1}}f_{i_1,\ldots,i_{k-1}}\mathrm{d}x^{i_1,\ldots,i_{k-1}}$, 记 $|g|=\det(g)$, 则有

$$\begin{aligned}
(-1)^k\star\big(\delta(f\mathrm{d}x^{1,\cdots,k})\big)&=(-1)^k\sum\nolimits_{i_1<\cdots<i_{k-1}}f_{i_1,\ldots,i_{k-1}}\tfrac{|g|^{1/2}}{(n-k+1)!}g^{i_1j_1}\cdots g^{i_{k-1}j_{k-1}}\varepsilon_{(j_1,\ldots,j_n)}\,\mathrm{d}x^{j_k,\ldots,j_n}\\
=\mathrm{d}\big(\star(f\mathrm{d}x^{1,\cdots,k})\big)&=\mathrm{d}\big(f\tfrac{|g|^{1/2}}{(n-k)!}g^{1,j_1}\cdots g^{k-1,j_{k-1}}g^{k,\ell}\varepsilon_{(j_1,\ldots,j_{k-1},\ell,j_{k+1},\ldots,j_n)}\,\mathrm{d}x^{j_{k+1},\ldots,j_n}\big)\\
&=\tfrac{1}{(n-k)!}\tfrac{\partial}{\partial x^{j_k}}\big(f|g|^{1/2}g^{1,j_1}\cdots g^{k-1,j_{k-1}}g^{k,\ell}\big)\varepsilon_{(j_1,\ldots,j_{k-1},\ell,j_{k+1},\ldots,j_n)}\,\mathrm{d}x^{j_k,\ldots,j_n}.
\end{aligned}$$

取 $i_k,\ldots,i_n$ 使 $\varepsilon_{(i_1,\ldots,i_n)}=1$, 利用 $g^{i_1j_1}\cdots g^{i_nj_n}\varepsilon_{(j_1,\ldots,j_n)}=|g|^{-1}$, 可得

$$\begin{aligned}
(-1)^kf_{i_1,\ldots,i_{k-1}}\tfrac{|g|^{-1/2}}{(n-k+1)!}&=\tfrac{1}{(n-k)!}\tfrac{\partial}{\partial x^{j_k}}\big(f|g|^{1/2}g^{1,j_1}\cdots g^{k-1,j_{k-1}}g^{k,\ell}\big)\varepsilon_{(j_1,\ldots,j_{k-1},\ell,j_{k+1},\ldots,j_n)}g^{i_kj_k}\cdots g^{i_nj_n}\\
&=\tfrac{1}{(n-k)!}\tfrac{\partial}{\partial x^\ell}\big(f|g|^{1/2}g^{1,j_1}\cdots g^{k,j_k}\big)\varepsilon_{(j_1,\ldots,j_n)}g^{i_k\ell}g^{i_{k+1}j_{k+1}}\cdots g^{i_nj_n},
\end{aligned}$$

即 $f_{i_1,\ldots,i_{k-1}}=(-1)^k(n-k+1)|g|^{1/2}\frac{\partial}{\partial x^\ell}\big(f|g|^{1/2}g^{1,j_1}\cdots g^{k,j_k}\big)\varepsilon_{(j_1,\ldots,j_n)}g^{i_k\ell}g^{i_{k+1}j_{k+1}}\cdots g^{i_nj_n}$. ////

习题 15.3. *考察单位球面 $S^2\subset\mathbb{R}^3$, 通过 $\mathbb{R}^3$ 的标准内积诱导 Riemann 度量. 在非南北极处, 表 $(x,y,z)=(\cos(\theta)\cos(\phi),\cos(\theta)\sin(\phi),\sin(\theta))$, 则 $(\frac{\partial}{\partial\theta},\frac{1}{\cos(\theta)}\frac{\partial}{\partial\phi})$ 是正交标架场, 其对偶余标架场为 $(\mathrm{d}\theta,\cos(\theta)\mathrm{d}\phi)$. 设 $\omega=f\mathrm{d}\theta+g\cos(\theta)\mathrm{d}\phi$ 是调和形式, 求 f 和 g 满足的偏微分方程.*

解. 记 $D_\theta=\cos(\theta)\frac{\partial}{\partial\theta}$ 和 $D_\phi=\frac{\partial}{\partial\phi}$, 我们有

$$\begin{aligned}
\tilde{\Delta}\omega&=\delta\mathrm{d}\omega+\mathrm{d}\delta\omega=\star^{-1}\mathrm{d}\star\mathrm{d}\omega-\mathrm{d}\star^{-1}\mathrm{d}\star\omega\\
&=\star^{-1}\mathrm{d}\star\big((-D_\phi f+D_\theta g-g\sin(\theta))\,\mathrm{d}\theta\wedge\mathrm{d}\phi\big)-\mathrm{d}\star^{-1}\mathrm{d}(f\cos(\theta)\mathrm{d}\phi-g\mathrm{d}\theta)\\
&=\star^{-1}\mathrm{d}(-\tfrac{1}{\cos(\theta)}D_\phi f+\tfrac{1}{\cos(\theta)}D_\theta g-g\tan(\theta))-\mathrm{d}\star^{-1}\big((D_\theta f-f\sin(\theta)+D_\phi g)\,\mathrm{d}\theta\wedge\mathrm{d}\phi\big)\\
&=\star^{-1}\big(\tfrac{1}{\cos^2(\theta)}(-\sin(\theta)D_\phi f-D_\theta D_\phi f+D_\theta^2g-g)\,\mathrm{d}\theta+\tfrac{1}{\cos(\theta)}(-D_\phi^2f+D_\phi D_\theta g-D_\phi g\sin(\theta))\,\mathrm{d}\phi\big)\\
&\quad-\mathrm{d}(\tfrac{1}{\cos(\theta)}D_\theta f-f\tan(\theta)+\tfrac{1}{\cos(\theta)}D_\phi g)\\
&=-\tfrac{1}{\cos(\theta)}(-\sin(\theta)D_\phi f-D_\theta D_\phi f+D_\theta^2g-g)\,\mathrm{d}\phi+\tfrac{1}{\cos^2(\theta)}(-D_\phi^2f+D_\phi D_\theta g-D_\phi g\sin(\theta))\,\mathrm{d}\theta\\
&\quad-\big(\tfrac{1}{\cos^2(\theta)}(D_\theta^2f-f+\sin(\theta)D_\phi g+D_\theta D_\phi g)\,\mathrm{d}\theta+\tfrac{1}{\cos(\theta)}(D_\phi D_\theta f-D_\phi f\sin(\theta)+D_\phi^2g)\,\mathrm{d}\phi\big)\\
&=-\tfrac{1}{\cos(\theta)}(-2\sin(\theta)D_\phi f+D_\theta^2g+D_\phi^2g-g)\,\mathrm{d}\phi+\tfrac{1}{\cos^2(\theta)}(-D_\theta^2f-D_\phi^2f+f-2\sin(\theta)D_\phi g)\,\mathrm{d}\theta.
\end{aligned}$$

若 ω 调和, 即 $\tilde{\Delta}\omega=0$, 则 $2\sin(\theta)D_\phi f=D_\theta^2g+D_\phi^2g-g$ 且 $-D_\theta^2f-D_\phi^2f+f=2\sin(\theta)D_\phi g$. ////

16 向量丛上的联络 (2021 年 6 月 2 日 +9 日 +11 日 +16 日)

注 16.1. (切丛上的) 联络给出平行移动的法则, 从而能够比较不同点处的 (切) 向量.

协变导数和联络紧密相关, 用以计算 (切) 向量场在一点附近的变化率.

定义 16.2 (向量丛)**.** 设 B 是流形, $\pi : E \to B$ 是满射. 称 $(\overset{\text{全空间}}{E}, \overset{\text{底空间}}{B}, \overset{\text{从投影}}{\pi})$ 为 n 维 (实) **向量丛**, 若存在 B 的开覆盖 $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 以及称为**局部平凡化**的同胚 $\rho_\lambda = (\pi, v_\lambda) : \pi^{-1}(U_\lambda) \to U_\lambda \times \mathbb{R}^n$, 使得对 $\forall\lambda, \tilde{\lambda} \in \Lambda$ 和 $\forall p \in U_\lambda \cap U_{\tilde{\lambda}}$, 在 p 处的**纤维** $E_p = \pi^{-1}(p)$ 上, **坐标变换** $g_{\tilde{\lambda}\leftarrow\lambda}(p) = v_{\tilde{\lambda}} \circ v_\lambda^{-1}\big|_{v_\lambda(E_p)}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的线性自同构. 如果 $\pi : E \to B$ 和每个 $g_{\tilde{\lambda}\leftarrow\lambda} : U_\lambda \cap U_{\tilde{\lambda}} \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ 都光滑, 则得到**光滑向量丛**.

注 16.3. 有时也称 E 是 B 上的向量丛. 常见的向量丛有: 切丛, 余切丛, 张量丛, 子流形的法丛.

习题 16.1. *设 M 是光滑流形, $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 是 M 的开覆盖. 对 $\forall\lambda, \tilde{\lambda} \in \Lambda$ 定义一个光滑函数 $g_{\tilde{\lambda}\leftarrow\lambda} : U_\lambda \cap U_{\tilde{\lambda}} \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, 使其满足*上闭链*条件 $g_{\nu\leftarrow\mu}g_{\mu\leftarrow\lambda} = g_{\nu\leftarrow\lambda}$ $(\forall\lambda, \mu, \nu \in \Lambda)$, 此时必有 $g_{\lambda\leftarrow\lambda} \equiv I_n$ 和 $g_{\lambda\leftarrow\tilde{\lambda}}(p) = g_{\tilde{\lambda}\leftarrow\lambda}(p)^{-1}$ $(\forall p \in U_\lambda \cap U_{\tilde{\lambda}})$. 证明: 存在 n 维光滑向量丛 (E, M, π), 使得每个 U_λ 对应一个局部平凡化 $(U_\lambda, \rho_\lambda)$, 并且从 $(U_\lambda, \rho_\lambda)$ 到 $(U_{\tilde{\lambda}}, \rho_{\tilde{\lambda}})$ 的转移矩阵由 $g_{\tilde{\lambda}\leftarrow\lambda}$ 给出. 注意 $e \in E$ 的纤维分量应理解为列向量, 转移矩阵的作用是左乘.*

证明. 取 $E = \{(p, v, \lambda) : p \in U_\lambda, v \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \Lambda\}/\sim$, 其中 $(p, v, \lambda) \sim (\tilde{p}, \tilde{v}, \tilde{\lambda})$ 定义为 $\tilde{p} = p$ 且 $\tilde{v} = g_{\tilde{\lambda}\leftarrow\lambda}(p)v$, 通过上闭链条件可以说明这是良定义的等价关系. 令 $\pi : [p, v, \lambda] \in E \mapsto p \in M$ 和 $\rho_\lambda : [p, v, \lambda] \in \pi^{-1}(U_\lambda) \mapsto (p, v) \in U_\lambda \times \mathbb{R}^n$, 即得所求. ■

定义 16.4 (正则图卡)**.** 对于向量丛 (E, B, π), 任取局部平凡化 $(U_\lambda, \rho_\lambda)$. 设 (V, x) 是 B 的图卡, $V \subset U_\lambda$, 则 E 有图卡 $\tilde{x} : e \in \pi^{-1}(V) \mapsto \big(\underbrace{x(\pi(e))}_{\text{底空间分量}}, \underbrace{v_\lambda(e)}_{\text{纤维分量}}\big) \in x(V) \times \mathbb{R}^n$, 称为 E 的**正则图卡**.

定义 16.5 (截面)**.** 设 (E, B, π) 是向量丛. 若映射 $s : B \to E$ 满足 $\pi \circ s = \mathrm{Id}_B$, 则 s 称为 E 的**截面**. 换言之, $s|_p \in E_p$, $\forall p \in B$. 向量丛 (E, B, π) 的所有光滑截面构成的集合记为 $\Gamma(E)$.

注 16.6. 切丛的截面是切向量场.

定义 16.7 (标架)**.** 设 E 是 B 上的 n 维向量丛. 称 $e_1, \dots, e_n \in \Gamma(E)$ 为 E 在 $U \subset B$ 上的一个**标架**, 如果在 $\forall p \in U$ 处 $e_1|_p, \dots, e_n|_p$ 都构成 $E_p \cong \mathbb{R}^n$ 的一组基.

注 16.8. 利用正则图卡可以得到自然标架.

命题 16.9. *底空间相同的向量丛可以按纤维定义对偶、直和、张量积, 相应地诱导截面的运算.*

定义 16.10 (拉回丛)**.** 若 E 是 B 上的向量丛, 则 $f : A \to B$ 诱导的 $f^*E = \{(p, e) \in A \times E : e \in E_{f(p)}\}$ 是 A 上的向量丛, 称为**拉回丛**.

定理 16.11 (实向量丛分类定理)**.** Thm. 1.16 in Hatcher's Vector Bundles and K-Theory

定义 16.12 (联络)**.** 向量丛 (E, M, π) 上的**联络**指的是一个映射 $\nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(E) \to \Gamma(E)$, 它在 $p \in M$ 处实现为 $\nabla : (\xi, s) \in T_pM \times \Gamma(E) \mapsto \nabla_\xi s \in E_p$ $(\cong T_{s|_p}E_p)$, 其中 $\nabla_\xi s$ 称为 s 对 ξ 的**协变导数** (衡量截面的纤维分量沿底空间切向量的变化率), 适合

(1) $\nabla_{a\xi+b\eta}s = a\nabla_\xi s + b\nabla_\eta s$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $\forall \xi, \eta \in T_pM$, $\forall s \in \Gamma(E)$;

(2) $\nabla_\xi(s_1 + s_2) = \nabla_\xi s_1 + \nabla_\xi s_2$, $\forall \xi \in T_pM$, $\forall s_1, s_2 \in \Gamma(E)$;

(3) $\nabla_\xi(fs) = \xi(f)s|_p + f|_p\nabla_\xi s$, $\forall \xi \in T_pM$, $\forall f \in C^\infty(M)$, $\forall s \in \Gamma(E)$.

注 16.13. 切丛上的联络称为**仿射联络**.

定义 16.14 (联络形式)**.** 取定 (局部) 标架 $e_1, \dots, e_n$, 通过 $\nabla_\xi e_j = \langle \omega_j^i|_p, \xi \rangle\, e_i|_p$ 定义 $\omega_j^i|_p \in T_p^*$.
称 $\omega_j^i \in \Omega^1$ 为**联络形式**, $\omega = (\omega_j^i)_{1\leq j\leq n}^{1\leq i\leq n}$ 为**联络矩阵**.

定义 16.15 (联络系数)**.** 取覆盖 p 的图卡 (V,x). 令 $\Gamma^i_{j;k}(p)=\langle\omega^i_j|_p,\frac{\partial}{\partial x^k}|_p\rangle$, 称为**联络系数**.

命题 16.16. *若 $s=s^ie_i$, 则 $\nabla_\xi s=\big(\xi(s^i)+\omega^i_j(\xi)s^j\big)e_i$. 形式地, 简记为 $\nabla s=\mathrm{d}s+\omega s$ 以及 $\nabla=\mathrm{d}+\omega$.*

注 16.17. 协变导数与逐分量求导的差体现于联络形式.

定义 16.18 (截面值微分形式)**.** 设 E 是 M 上的向量丛. 回顾定义11.1, 称 $\Omega^k(E)=\Omega^k(M;\Gamma(E))$ 的成员为**截面值 k-形式**. 特别地, $\Omega^0(E)=\Gamma(E)$.

注 16.19. 对于 $s\in\Gamma(E)$, 将 ∇s 等同于 $(\xi\mapsto\nabla_\xi s)\in\Omega^1(E)$, 则有 $\nabla:\Gamma(E)\to\Omega^1(E)$.

定义 16.20 (协变微分)**.** 任取截面值 k-形式 $\alpha=\alpha^ie_i$, 其中 α^i 是 k-形式, e_i 是截面, 则 α 的**协变微分**为 $\nabla\alpha=(\mathrm{d}\alpha^i)e_i+(-1)^k\alpha^i\wedge\nabla e_i$. 协变微分 $\nabla\alpha$ 不依赖 α 的表达式的选取, 是良定义的.

命题 16.21. *设 $\{e_i\}$ 是标架, ω^i_j 是相应的联络形式, 即 $\nabla e_j=\omega^i_je_i$. 对于截面值 k-形式 $\alpha=\alpha^ie_i$, 有 $\nabla\alpha=(\mathrm{d}\alpha^i+\omega^i_j\wedge\alpha^j)e_i$. 形式地, 简记为 $\nabla\alpha=\mathrm{d}\alpha+\omega\wedge\alpha$ 以及 $\nabla=\mathrm{d}+\omega\wedge$.*

推论 16.22 (Cartan 结构方程)**.** *承前, $\nabla(\nabla\alpha)=(\mathrm{d}\omega)\wedge\alpha+(\omega\wedge\omega)\wedge\alpha$, 其中 $\omega\wedge\omega=(\omega^i_k\wedge\omega^k_j)$. 简记为 $\nabla^2=(\mathrm{d}\omega+\omega\wedge\omega)\wedge$.*

证明. 将 $\mathrm{d}(\nabla\alpha)=((\mathrm{d}\omega^i_j)\wedge\alpha^j-\omega^i_j\wedge\mathrm{d}\alpha^j)e_i$ 和 $\omega\wedge\nabla\alpha=(\omega^i_j\wedge\mathrm{d}\alpha^j+\omega^i_k\wedge\omega^k_j\wedge\alpha^j)e_i$ 相加. □

习题 16.2. *设 ∇ 是光滑流形 M 的切丛 TM 上的一个联络. 写出联络系数的坐标变换公式, 从而说明它不能给出 M 上的张量场.*

解. 任取 M 的图卡 (U,x) 和 (V,y), 记 $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}}\frac{\partial}{\partial x^j}=\Gamma^i_{j;k}\frac{\partial}{\partial x^i}$ 和 $\nabla_{\frac{\partial}{\partial y^k}}\frac{\partial}{\partial y^j}=\widetilde{\Gamma}^i_{j;k}\frac{\partial}{\partial y^i}$. 直接计算可得 $\nabla_{\frac{\partial}{\partial y^k}}\frac{\partial}{\partial y^j}=\frac{\partial x^\nu}{\partial y^k}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^\nu}}(\frac{\partial x^\mu}{\partial y^j}\frac{\partial}{\partial x^\mu})=\frac{\partial x^\nu}{\partial y^k}\Big(\frac{\partial}{\partial x^\nu}(\frac{\partial x^\mu}{\partial y^j})\frac{\partial}{\partial x^\mu}+\frac{\partial x^\mu}{\partial y^j}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^\nu}}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\Big)=\frac{\partial^2x^\mu}{\partial y^j\partial y^k}\frac{\partial}{\partial x^\mu}+\frac{\partial x^\mu}{\partial y^j}\frac{\partial x^\nu}{\partial y^k}\Gamma^\lambda_{\mu;\nu}\frac{\partial}{\partial x^\lambda}$, 故 $\widetilde{\Gamma}^i_{j;k}=\langle\mathrm{d}y^i,\nabla_{\frac{\partial}{\partial y^k}}\frac{\partial}{\partial y^j}\rangle=\frac{\partial^2x^\lambda}{\partial y^j\partial y^k}\frac{\partial y^i}{\partial x^\lambda}+\Gamma^\lambda_{\mu;\nu}\frac{\partial y^i}{\partial x^\lambda}\frac{\partial x^\mu}{\partial y^j}\frac{\partial x^\nu}{\partial y^k}$, 比张量系数的坐标变换多出了 $\frac{\partial^2x^\lambda}{\partial y^j\partial y^k}\frac{\partial y^i}{\partial x^\lambda}$. ////

习题 16.3. *设 ∇ 是仿射联络, X 和 Z 是切向量场. 证明:*

(a) 若 $\widetilde{\nabla}$ 也是仿射联络, 则 $(Z,X)\mapsto\widetilde{\nabla}_ZX-\nabla_ZX$ 是 $(1,2)$ 型张量场.

(b) 若 S 是 $(1,2)$ 型张量场, 则 $(Z,X)\mapsto\nabla_ZX+S(Z,X)$ 是仿射联络.

证明. 易见所有映射都关于 Z 是 C^∞-线性的, 并且关于 X 是 $\mathbb{R}$-线性的. 任取函数 $f\in C^\infty$.

(a) $\widetilde{\nabla}_Z(fX)-\nabla_Z(fX)=(f\widetilde{\nabla}_ZX+(Zf)X)-(f\nabla_ZX+(Zf)X)=f(\widetilde{\nabla}_ZX-\nabla_ZX)$.

(b) $\nabla_Z(fX)+S(Z,fX)=f\nabla_ZX+(Zf)X+fS(Z,X)=f(\nabla_ZX+S(Z,X))+(Zf)X$. ■

习题 16.4. *设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 的光滑子流形, 含入映射 $\iota:\Omega\hookrightarrow\mathbb{R}^n$ 是光滑嵌入, 则在 $\forall p\in\Omega$ 处有正交分解 $T_p\mathbb{R}^n=\iota_*(T_p\Omega)\oplus N_p\Omega$, 其中 $N_p\Omega=\iota_*(T_p\Omega)^\perp$ 是 p 点的*法空间*. 任取 Ω 上的光滑切向量场 $\xi\in\Gamma(T\Omega)$ 和 $\mathbb{R}^n$ 上的光滑切向量场 $\eta=\eta^i\frac{\partial}{\partial x^i}\in\Gamma(T\mathbb{R}^n)$, 定义 $\partial_\xi\eta:p\in\Omega\mapsto\iota_*(\xi|_p)(\eta^i)\frac{\partial}{\partial x^i}|_p\in T_p\mathbb{R}^n$.*

(a) 举例说明 $\partial_\xi\eta|_p$ 不一定在 $\iota_*(T_p\Omega)$ 里, 即使 $\eta=\iota_*(\tilde\eta)$, 其中 $\tilde\eta$ 是 Ω 上的光滑切向量场.

(b) 利用正交投影 $\mathrm{proj}_{\iota_*(T_p\Omega)}\partial_\xi\iota_*(\tilde\eta)|_p=\iota_*(\widetilde{\nabla}_\xi\tilde\eta|_p)$ 定义 $\widetilde{\nabla}_\xi\tilde\eta|_p\in T_p\Omega$, 其中 ξ 和 $\tilde\eta$ 均为 Ω 上的光滑切向量场. 这个 $\widetilde{\nabla}$ 是切丛 $T\Omega$ 上的联络吗? 说明理由.

(c) 定义 $\nabla^\perp_\xi\eta|_p=\mathrm{proj}_{N_p\Omega}\partial_\xi\eta|_p$, 其中 ξ 是 Ω 上的光滑切向量场, η 是 Ω 上的光滑法向量场. 这个 $\nabla^\perp$ 是法丛 $N\Omega$ 上的联络吗? 说明理由.

解. (a) 考虑 $\Omega=S^1=\{x\in\mathbb{R}^2:\|x\|^2=1\}$ 为单位圆周, 由习题2.2可知 $N_xS^1=\mathrm{span}(\{x\})$. 对于 $\eta=x^2\frac{\partial}{\partial x^1}-x^1\frac{\partial}{\partial x^2}$, 有 $\xi=\eta|_{S^1}\in\Gamma(TS^1)$, 而 $\partial_\xi\xi|_x=-x^1\frac{\partial}{\partial x^1}-x^2\frac{\partial}{\partial x^2}\in N_xS^1$.

(b) 答案是肯定的, 因为满足双线性性质和 Leibniz 法则. (Gauss)

(c) 答案是肯定的, 因为满足双线性性质和 Leibniz 法则. (Weingarten) ////

定义 16.23 (挠率). 设 ∇ 是 M 上的仿射联络, 则**挠率**为 $T(\xi,\eta)=\nabla_\xi\eta-\nabla_\eta\xi-[\xi,\eta]$, 其中 ξ 和 η 是 M 上的切向量场. 不难验证挠率 T 是 $(1,2)$ 型张量场. 若 $T\equiv 0$, 则称 ∇ 为**无挠/对称**的.

注 16.24. 在图卡 (U,x) 里, 记 $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}}\frac{\partial}{\partial x^j}=\Gamma^i_{j;k}\frac{\partial}{\partial x^i}$, 则 ∇ 无挠当且仅当 $\Gamma^i_{j;k}=\Gamma^i_{k;j}$ $(\forall i,j,k)$.

定义 16.25 (张量场的协变导数). 设 ∇ 是仿射联络, ξ 是切向量场, T 是 (r,s) 型张量场, 则 T 关于 ξ 的**协变导数** $\nabla_\xi T$ 也是 (r,s) 型张量场, 满足

1. 若 a 和 b 是常数, R 和 S 是同阶张量场, 则 $\nabla_\xi(aR+bS)=a\nabla_\xi R+b\nabla_\xi S$
2. 若 h 是函数, 则 $\nabla_\xi h=\partial_\xi h$
3. 若 ω 是余切向量场, η 是切向量场, 则 $\partial_\xi\langle\omega,\eta\rangle=\langle\nabla_\xi\omega,\eta\rangle+\langle\omega,\nabla_\xi\eta\rangle$
4. 若 R 和 S 是张量场, 则 $\nabla_\xi(R\otimes S)=(\nabla_\xi R)\otimes S+R\otimes\nabla_\xi S$

注 16.26. 记 $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}}\frac{\partial}{\partial x^j}=\Gamma^i_{j;k}\frac{\partial}{\partial x^i}$, 则 $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}}\mathrm{d}x^i=-\Gamma^i_{j;k}\mathrm{d}x^j$ 且

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}}(g_{ij}\,\mathrm{d}x^i\otimes\mathrm{d}x^j)=\big(\tfrac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}-\Gamma^\ell_{j;k}g_{i\ell}-\Gamma^\ell_{i;k}g_{\ell j}\big)\,\mathrm{d}x^i\otimes\mathrm{d}x^j.$$

定义 16.27 (与度量相容). 设 ∇ 是 Riemann 流形 (M,g) 上的仿射联络. 若 $\nabla_\zeta g\equiv 0$, $\forall\zeta\in\Gamma(TM)$, 则称 ∇ 是**度量联络**. 等价地, ∇ **与** g **相容**, 即 $\partial_\zeta g(\xi,\eta)=g(\nabla_\zeta\xi,\eta)+g(\xi,\nabla_\zeta\eta)$, $\forall\xi,\eta,\zeta\in\Gamma(TM)$.

定理 16.28. *在 Riemann 流形 (M,g) 上存在唯一的仿射联络 ∇, 满足无挠并且与度量相容. 这个 ∇ 称为* ***Levi–Civita* 联络**.

证明. 可以解得 **Koszul 公式**: 对于 $\xi,\eta,\zeta\in\Gamma(TM)$, 有

$$g(\nabla_\xi\eta,\zeta)=\tfrac12\big(\partial_\xi g(\eta,\zeta)+\partial_\eta g(\zeta,\xi)-\partial_\zeta g(\xi,\eta)+g([\xi,\eta],\zeta)+g([\zeta,\xi],\eta)-g([\eta,\zeta],\xi)\big).$$

记 $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}}\frac{\partial}{\partial x^j}=\Gamma^i_{j;k}\frac{\partial}{\partial x^i}$, 则 $\Gamma^i_{j;k}=\frac12 g^{i\ell}\big(\frac{\partial g_{j\ell}}{\partial x^k}+\frac{\partial g_{k\ell}}{\partial x^j}-\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^\ell}\big)$, 称为 **Christoffel 符号**. □

习题 16.5. *考虑双曲抛物面 $M=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2-y^2+2z=0\}$, 通过 $\mathbb{R}^3$ 的标准内积诱导 Riemann 度量, 从而得到 Levi–Civita 联络. 显然 M 有一个整体坐标系 $(u,v,z)\in M\mapsto(u,v)\in\mathbb{R}^2$, 借此写出自然基底对应的 Christoffel 符号和联络形式矩阵.* (Hyperbolic Paraboloid in Wolfram|Alpha)

解. 注意 $z=\frac12(v^2-u^2)$. 直接计算可得 $\frac{\partial}{\partial u}=(1,0,-u)$ 和 $\frac{\partial}{\partial v}=(0,1,v)$, 相应的 Riemann 度量为 $\begin{pmatrix}g_{uu}&g_{uv}\\g_{vu}&g_{vv}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+u^2&-uv\\-uv&1+v^2\end{pmatrix}$, 其逆矩阵为 $\begin{pmatrix}g^{uu}&g^{uv}\\g^{vu}&g^{vv}\end{pmatrix}=\dfrac{1}{1+u^2+v^2}\begin{pmatrix}1+v^2&uv\\uv&1+u^2\end{pmatrix}$. 于是,

$\Gamma^u_{u;u}=\frac12\big(g^{uu}(2\frac{\partial g_{uu}}{\partial u}-\frac{\partial g_{uu}}{\partial u})+g^{uv}(2\frac{\partial g_{uv}}{\partial u}-\frac{\partial g_{uu}}{\partial v})\big)=\frac12\cdot\frac{1}{1+u^2+v^2}\big((1+v^2)\cdot 2u+uv(-2v)\big)=\frac{u}{1+u^2+v^2}$,
$\Gamma^u_{u;v}=\Gamma^u_{v;u}=\frac12\big(g^{uu}(\frac{\partial g_{uu}}{\partial v}+\frac{\partial g_{vu}}{\partial u}-\frac{\partial g_{uv}}{\partial u})+g^{uv}(\frac{\partial g_{uv}}{\partial v}+\frac{\partial g_{vv}}{\partial u}-\frac{\partial g_{uv}}{\partial v})\big)=0$,
$\Gamma^u_{v;v}=\frac12\big(g^{uu}(2\frac{\partial g_{vu}}{\partial v}-\frac{\partial g_{vv}}{\partial u})+g^{uv}(2\frac{\partial g_{vv}}{\partial v}-\frac{\partial g_{vv}}{\partial v})\big)=\frac12\cdot\frac{1}{1+u^2+v^2}\big((1+v^2)(-2u)+uv\cdot 2v\big)=-\frac{u}{1+u^2+v^2}$,
$\Gamma^v_{u;u}=\frac12\big(g^{vu}(2\frac{\partial g_{uu}}{\partial u}-\frac{\partial g_{uu}}{\partial u})+g^{vv}(2\frac{\partial g_{uv}}{\partial u}-\frac{\partial g_{uu}}{\partial v})\big)=\frac12\cdot\frac{1}{1+u^2+v^2}\big(uv\cdot 2u+(1+u^2)(-2v)\big)=-\frac{v}{1+u^2+v^2}$,
$\Gamma^v_{u;v}=\Gamma^v_{v;u}=\frac12\big(g^{vu}(\frac{\partial g_{uu}}{\partial v}+\frac{\partial g_{vu}}{\partial u}-\frac{\partial g_{uv}}{\partial u})+g^{vv}(\frac{\partial g_{uv}}{\partial v}+\frac{\partial g_{vv}}{\partial u}-\frac{\partial g_{uv}}{\partial v})\big)=0$,
$\Gamma^v_{v;v}=\frac12\big(g^{vu}(2\frac{\partial g_{vu}}{\partial v}-\frac{\partial g_{vv}}{\partial u})+g^{vv}(2\frac{\partial g_{vv}}{\partial v}-\frac{\partial g_{vv}}{\partial v})\big)=\frac12\cdot\frac{1}{1+u^2+v^2}\big(uv(-2u)+(1+u^2)\cdot 2v\big)=\frac{v}{1+u^2+v^2}$,

联络形式矩阵为 $\begin{pmatrix}\omega^u_u&\omega^u_v\\\omega^v_u&\omega^v_v\end{pmatrix}$, 其中 $\begin{cases}\omega^u_u=\Gamma^u_{u;u}\,\mathrm{d}u+\Gamma^u_{u;v}\,\mathrm{d}v=\frac{u}{1+u^2+v^2}\,\mathrm{d}u\\\omega^u_v=\Gamma^u_{v;u}\,\mathrm{d}u+\Gamma^u_{v;v}\,\mathrm{d}v=-\frac{u}{1+u^2+v^2}\,\mathrm{d}v\\\omega^v_u=\Gamma^v_{u;u}\,\mathrm{d}u+\Gamma^v_{u;v}\,\mathrm{d}v=-\frac{v}{1+u^2+v^2}\,\mathrm{d}u\\\omega^v_v=\Gamma^v_{v;u}\,\mathrm{d}u+\Gamma^v_{v;v}\,\mathrm{d}v=\frac{v}{1+u^2+v^2}\,\mathrm{d}v\end{cases}$. ////

命题 16.29. *设流形有 Riemann 度量, ∇ 是 Levi–Civita 联络. 若 $\{e_i\}$ 是 (局部) 正交标架场, 记 $[e_i,e_j]=c_{ij}^k e_k$ 和 $\nabla_{e_k}e_j=\Gamma_{jk}^i e_i$, 则 $\Gamma_{jk}^i=\frac{1}{2}(-c_{jk}^i-c_{ki}^j+c_{ij}^k)$. (对于 2 维流形/曲面, $\Gamma_{jk}^i=c_{ij}^k$.)*

证明. 联络与度量相容等价于 $\Gamma_{ik}^j+\Gamma_{jk}^i=0$, 无挠等价于 $\Gamma_{ji}^k-\Gamma_{ij}^k=c_{ij}^k$. 用 Koszul 公式也可. □

命题 16.30. *若联络与度量相容, 则正交标架场给出的联络形式矩阵 $\omega=(\omega_j^i)$ 反对称, 即 $\omega_i^j=-\omega_j^i$.*

证明. 设 $\{e_i\}$ 是正交标架场, $\{f^i\}$ 是对偶的余标架场. 若 $\nabla_{e_k}e_j=\Gamma_{jk}^i e_i$, 则 $\omega_j^i=\Gamma_{jk}^i f^k$. □

习题 16.6. *考察单位球面 $S^2\subset\mathbb{R}^3$, 通过 $\mathbb{R}^3$ 的标准内积诱导 Riemann 度量. 在非南北极处, 表 $(x,y,z)=(\cos(\theta)\cos(\phi),\cos(\theta)\sin(\phi),\sin(\theta))$, 则 $(\frac{\partial}{\partial\theta},\frac{1}{\cos(\theta)}\frac{\partial}{\partial\phi})$ 是正交标架场, 借此计算 Levi–Civita 联络对应的协变微分 ∇ 以及两次协变微分 ∇^2.*

解. 对于 $e_1=\frac{\partial}{\partial\theta}$ 和 $e_2=\frac{1}{\cos(\theta)}\frac{\partial}{\partial\phi}$, 有 $[e_1,e_2]=\frac{\sin(\theta)}{\cos^2(\theta)}\frac{\partial}{\partial\phi}=\tan(\theta)e_2$. 记 $\nabla_{e_k}e_j=\Gamma_{jk}^i e_i$, 直接计算可得 $\Gamma_{1k}^1=\Gamma_{2k}^2=\Gamma_{21}^1=\Gamma_{11}^2=0$, 以及 $\Gamma_{22}^1=\tan(\theta)$ 和 $\Gamma_{12}^2=-\tan(\theta)$. 令 $f^1=\mathrm{d}\theta$ 和 $f^2=\cos(\theta)\mathrm{d}\phi$, 即 $\{f^i\}$ 是 $\{e_i\}$ 的对偶余标架场. 联络形式矩阵为 $\omega=\begin{pmatrix}\omega_1^1&\omega_2^1\\\omega_1^2&\omega_2^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&\omega_2^1\\-\omega_2^1&0\end{pmatrix}$, 其中 $\omega_2^1=\Gamma_{2k}^1 f^k=\sin(\theta)\mathrm{d}\phi$. 进一步地, $\mathrm{d}\omega+\omega\wedge\omega=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\cos(\theta)\mathrm{d}\theta\wedge\mathrm{d}\phi$. 关于标架 (e_1,e_2), 我们有 $\nabla=\mathrm{d}+\omega\wedge$ 和 $\nabla^2=(\mathrm{d}\omega+\omega\wedge\omega)\wedge$. 具体地, 任取 $\alpha=\alpha^i e_i$, 其中 α^i 是微分形式, 则有 $\nabla\alpha=(\mathrm{d}\alpha^i)e_i+\sin(\theta)\mathrm{d}\phi\wedge(\alpha^2e_1-\alpha^1e_2)$ 和 $\nabla^2\alpha=\cos(\theta)\mathrm{d}\theta\wedge\mathrm{d}\phi\wedge(\alpha^2e_1-\alpha^1e_2)$. ////

17 平行移动和曲率 (2021 年 6 月 9 日 +11 日 +16 日)

定义 17.1 (平行移动)**.** 设 ∇ 是向量丛 (E,M,π) 上的联络, $s\in\Gamma(\gamma^*E)$ 是沿 $\gamma:[t_0,t_1]\to M$ 的截面. 若 $\nabla_{\frac{\partial}{\partial\gamma}}s\equiv0$, 则称 s 沿 γ **平行**, 此时 $P_\gamma:s(t_0)\in E_{\gamma(t_0)}\mapsto s(t_1)\in E_{\gamma(t_1)}$ 称为沿 γ 的**平行移动**.

注 17.2 (和乐). 当 γ 取遍起点和终点均为 p 的曲线, P_γ 构成 p 点的和乐(变换)群 $\mathrm{Hol}_p(\nabla)$.

命题 17.3. *任取 $s_0\in E_{\gamma(t_0)}$, 存在唯一的沿 γ 平行的截面 $s\in\Gamma(\gamma^*E)$, 使得 $s(t_0)=s_0$.*

证明. 取 E 的标架 $\{e_i\}$, 记 $\nabla_{\frac{\partial}{\partial\gamma}}e_j=a_j^ie_i$. 表 $s\circ\gamma=y^ie_i$, 则 s 沿 γ 平行 $\iff\frac{\mathrm{d}y^i}{\mathrm{d}t}+a_j^iy^j=0\ (\forall i)$. □

注 17.4. 平移算子 $P_\gamma:E_{\gamma(t_0)}\to E_{\gamma(t_1)}$ 是线性同构. 特别地, $\mathrm{Hol}_p(\nabla)\subset\mathrm{GL}(E_p)$.

命题 17.5 (协变导数几何解释)**.** *任取沿 γ 的截面 s, 有 $\nabla_{\frac{\partial}{\partial\gamma}|_{t_0}}s=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big|_{t_0}P_{\gamma_t}^{-1}(s|_{\gamma(t)})$, 其中 $\gamma_t=\gamma|_{[t_0,t]}$.*

证明. 取 E 的沿 γ 平行的标架 $\{e_i\}$. 表 $s\circ\gamma=y^ie_i$, 则 $P_{\gamma_t}^{-1}(s|_{\gamma(t)})=y^i(t)P_{\gamma_t}^{-1}(e_i|_{\gamma(t)})=y^i(t)e_i|_{\gamma(t_0)}$. 另一方面, 由 $\nabla_{\frac{\partial}{\partial\gamma}}e_i=0$ 可得 $\nabla_{\frac{\partial}{\partial\gamma}|_{t_0}}s=\frac{\mathrm{d}y^i}{\mathrm{d}t}\big|_{t_0}e_i|_{\gamma(t_0)}+\cancel{y^i(t_0)\nabla_{\frac{\partial}{\partial\gamma}|_{t_0}}e_i}$. □

命题 17.6 (挠率的几何含义)**.** *设 T 是仿射联络 ∇ 诱导的挠率. 取定图卡 (U,x) 和 $p\in U$, 对 $\zeta=\zeta^i\frac{\partial}{\partial x^i}|_p\in T_p$ 定义沿 ζ 的平移 $P_\zeta=P_{\gamma_\zeta}$, 其中 $\gamma_\zeta:[0,1]\to U$ 是满足 $x^i\circ\gamma_\zeta(u)=x^i(p)+\zeta^iu\ (\forall i)$ 的曲线. 考察关于 $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}$ 的坐标, 有 $(P_{t\eta}(s\xi)+t\eta)-(s\xi+P_{s\xi}(t\eta))=stT(\xi,\eta)+o(st)$.*

证明. 设 $\xi=\xi^i\frac{\partial}{\partial x^i}|_p$ 和 $\eta=\eta^i\frac{\partial}{\partial x^i}|_p$, 则 $T(\xi,\eta)=(\xi^k\eta^j-\eta^k\xi^j)\Gamma_{j;k}^i(p)\frac{\partial}{\partial x^i}|_p$, 其中 $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}}\frac{\partial}{\partial x^j}=\Gamma_{j;k}^i\frac{\partial}{\partial x^i}$. 令 $\tilde{\xi}(t)=P_{t\eta}(\xi)=P_{\gamma_\eta|_{[0,t]}}(\xi)$. 由 $\frac{\partial}{\partial\gamma_\eta}=\eta^k\frac{\partial}{\partial x^k}$ 可知 $\nabla_{\frac{\partial}{\partial\gamma_\eta}}\frac{\partial}{\partial x^j}=\eta^k\Gamma_{j;k}^i\frac{\partial}{\partial x^i}$, 因此坐标 $\tilde{\xi}^i=\langle\mathrm{d}x^i,\tilde{\xi}\rangle$ 满足 $\frac{\mathrm{d}\tilde{\xi}^i}{\mathrm{d}t}+\eta^k\Gamma_{j;k}^i\tilde{\xi}^j=0$, 亦即 $\frac{\mathrm{d}\tilde{\xi}}{\mathrm{d}t}=-\tilde{\xi}^j\eta^k\Gamma_{j;k}^i$. 特别地, $\langle\mathrm{d}x^i,P_{t\eta}(\xi)\rangle=\tilde{\xi}^i(t)=\xi^i-\xi^j\eta^k\Gamma_{j;k}^i(p)t+o(t)$. 同理, $\langle\mathrm{d}x^i,P_{s\xi}(\eta)\rangle=\eta^i-\eta^j\xi^k\Gamma_{j;k}^i(p)s+o(s)$. 用 $P_{t\eta}(s\xi)=sP_{t\eta}(\xi)$ 和 $P_{s\xi}(t\eta)=tP_{s\xi}(\eta)$ 即证. □

定义 17.7 (Ehresmann 联络). 设 (E, M, π) 是向量丛. 任取 $e \in E$, 称 $V_e = \ker(\pi_* : T_eE \to T_{\pi(e)}M)$ 为 e 处的**竖直子空间**. 指定 $H_e \subset T_eE$, 适合 $T_eE = H_e \oplus V_e$ 和 $H_{ce} = (\mu_c)_*(H_e)$ $(\forall c \in \mathbb{R})$, 其中 $\mu_c(e) = ce$, 则 $e \mapsto H_e$ 称为一个**线性 Ehresmann 联络**, 其中 H_e 称为 e 处的**水平子空间**.

注 17.8. 利用 $T_eE \cong T_{\pi(e)}M \oplus E_{\pi(e)}$ 可知 $V_e \cong E_{\pi(e)}$, 而 H_e 与 $T_{\pi(e)}M$ 的偏离体现空间的弯曲. 按照分解 $T_eE = H_e \oplus V_e$, 任意 T_eE 里的向量可以唯一确定其竖直分量, 这个映射记为 $\nu : T_eE \to E_{\pi(e)}$.

命题 17.9. *在向量丛 (E, M, π) 上,*

- *若 ∇ 是联络, 则有 Ehresmann 联络 $H_e = s_*(T_pM)$, 其中 $s \in \Gamma(E)$ 满足 $s(p) = e$ 和 $\nabla s \equiv 0$;*
- *若 $\nu : TE \to \pi^*E$ 是竖直分量投影, 则 $\nabla s = \nu \circ s_* : TM \to E$ 定义了 $s \in \Gamma(E)$ 的协变微分.*

定义 17.10 (测地线). 设 ∇ 是 M 上的仿射联络, γ 是光滑曲线. 若 $\nabla_{\frac{\partial}{\partial\gamma}}\frac{\partial}{\partial\gamma} \equiv 0$, 则称 γ 是**测地线**.

命题 17.11. *任取 $p \in M$ 和 $v \in T_pM$, 存在唯一的测地线 γ 使得 $\gamma(0) = p$ 且 $\gamma'(0) = v$.*

证明. 取 M 的光滑图卡 (U, x) 覆盖 p. 记 $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}}\frac{\partial}{\partial x^j} = \Gamma^i_{j;k}\frac{\partial}{\partial x^i}$, 则 γ 是测地线当且仅当 $\gamma^i = x^i \circ \gamma$ 满足测地线方程 $\frac{\mathrm{d}^2\gamma^i}{\mathrm{d}t^2} + \Gamma^i_{j;k}\frac{\mathrm{d}\gamma^j}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\gamma^k}{\mathrm{d}t} = 0$ $(\forall i)$. 引入 $y^i = \frac{\mathrm{d}\gamma^i}{\mathrm{d}t}$, 则测地线方程化为 $\frac{\mathrm{d}y^i}{\mathrm{d}t} = -\Gamma^i_{j;k}y^jy^k$. □

命题 17.12. *在 Riemann 流形 (M, g) 上赋予 Levi–Civita 联络. 若 ξ 和 η 是沿 γ 平行的切向量场, 则 $\frac{\partial}{\partial\gamma}g(\xi, \eta) \equiv 0$; 这说明平移是等距, 保持向量的长度和夹角.*

推论 17.13. *在 Riemann 流形 (M, g) 上赋予 Levi–Civita 联络, 则测地线 γ 的速率 $|\frac{\partial}{\partial\gamma}| = \sqrt{g(\frac{\partial}{\partial\gamma}, \frac{\partial}{\partial\gamma})}$ 是常值. 不失一般性地, 可以借助线性函数让测地线以弧长为参数.*

定理 17.14. *测地线是长度泛函 $L(\gamma) = \int|\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t$ 的临界点.*

(`http://staff.ustc.edu.cn/~wangzuoq/Courses/16S-RiemGeom/Notes/Lec11.pdf`)

命题 17.15 (距离). *设 M 是连通的 Riemann 流形. 任取 $p, q \in M$, 定义 $d(p, q) = \inf L(\gamma)$, 其中 γ 取遍连接 p 和 q 的曲线, 则 d 是 M 上的度量.*

定义 17.16 (指数映射). $\exp : v \in T_pM \mapsto \gamma(1) \in M$, 其中 γ 是测地线, 满足 $\gamma(0) = p$ 和 $\gamma'(0) = v$.

注 17.17. 指数映射 exp 也称为**展开映射**. 测地线的定义域有可能不包含 1.

命题 17.18. *指数映射 exp 光滑.*

定理 17.19 (Hopf–Rinow). *设 M 是连通的 Riemann 流形, 配备 Levi–Civita 联络. 以下性质等价:*

- *M 是完备度量空间: Cauchy 列均收敛*
- *M 是**测地完备**的: 测地线均可定义在 $\mathbb{R}$ 上*
- *展开映射 exp 在 T_pM 上处处有定义*

此时 M 的任意两点之间存在一条最短测地线.

(`http://staff.ustc.edu.cn/~wangzuoq/Courses/16S-RiemGeom/Notes/Lec15.pdf`)

注 17.20. 不能推广到伪 Riemann 流形, 反例为 Clifton–Pohl 环.

习题 17.1. *我们来探究 Gauss–Bonnet 定理的最基本情形. 设 $\gamma : [0, 1] \to S^2$ 是单位球面上的分段光滑简单闭曲线, 即存在 $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_K = 1$ 使得每个 $\gamma|_{[t_{k-1}, t_k]}$ 都是光滑嵌入, $\gamma|_{[0,1)}$ 是单射, 并且 $\gamma(1) = \gamma(0)$. 由 Schönflies 定理可知, $S^2 \setminus \gamma([0, 1])$ 恰有两个连通分支 U_1 和 U_2, 并且它们均同胚于圆盘. 对于 $X \in T_{\gamma(0)}S^2$, 沿 γ 平移可以得到 $X(t) \in T_{\gamma(t)}S^2$. 证明 U_1 和 U_2 的面积分别为 $2\pi \pm \measuredangle(X(0), X(1))$, 其中 $\measuredangle(X(0), X(1))$ 是 $T_{\gamma(0)}S^2$ 里 $X(0)$ 到 $X(1)$ 的转角.*

证明. 我们沿用习题16.6的设定. 由于平移是等距, 不妨设 $X(t)=\cos(\psi(t))e_1|_{\gamma(t)}+\sin(\psi(t))e_2|_{\gamma(t)}$. 记 $\frac{\partial}{\partial\gamma}=v^k e_k$, 则

$$\begin{aligned}\nabla_{\frac{\partial}{\partial\gamma}}X&=\tfrac{\mathrm{d}\cos(\psi)}{\mathrm{d}t}e_1+\cos(\psi)v^k\Gamma_{1k}^i e_i+\tfrac{\mathrm{d}\sin(\psi)}{\mathrm{d}t}e_2+\sin(\psi)v^k\Gamma_{2k}^i e_i\\&=-\psi'\sin(\psi)e_1-\cos(\psi)v^2\tan(\theta)e_2+\psi'\cos(\psi)e_2+\sin(\psi)v^2\tan(\theta)e_1\\&=(v^2\tan(\theta)-\psi')(\sin(\psi)e_1-\cos(\psi)e_2)\end{aligned}$$

为零, 即得 $\psi'(t)=(v^2\tan(\theta))|_{\gamma(t)}$. 注意 $\frac{\partial}{\partial\gamma}=\frac{\mathrm{d}(\theta\circ\gamma)}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{\mathrm{d}(\phi\circ\gamma)}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial\phi}$, 所以 $v^2=\langle f^2,\frac{\partial}{\partial\gamma}\rangle=\cos(\theta)\frac{\mathrm{d}(\phi\circ\gamma)}{\mathrm{d}t}$. 综上, $\measuredangle(X(0),X(1))=\int_0^1\psi'(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^1\gamma^*(\sin(\theta)\mathrm{d}\phi)$. 根据 Stokes 定理, 这个沿 $\gamma=\partial U_i$ 的曲线积分几乎就是 $\mathrm{d}(\sin(\theta)\mathrm{d}\phi)=\cos(\theta)\mathrm{d}\theta\wedge\mathrm{d}\phi=f^1\wedge f^2$ 在 U_i 上的积分, 其中正负号取决于定向, 2π 出现是因为南北极处需要调整图卡以避免奇点. ■

习题 17.2. *考虑双叶双曲面的一个连通分支 $H_+^2=\{(x,y,z):x^2+y^2-z^2+1=0,\ z>0\}$, 拉回 $\mathbb{R}^3$ 上的伪 Riemann 度量 $\tilde g=\mathrm{d}x\otimes\mathrm{d}x+\mathrm{d}y\otimes\mathrm{d}y-\mathrm{d}z\otimes\mathrm{d}z$ 可以得到 H_+^2 上的一个 Riemann 度量 g.*

(a) 证明 g 确实是正定的.

(b) 给 (H_+^2,g) 赋予 Levi–Civita 联络. 计算所有 Christoffel 符号 (联络系数).

(c) 证明 H_+^2 上的每条经过 $(0,0,1)$ 的测地线都是包含 z 轴的平面与 H_+^2 的交线.

(d) 令 $\gamma_s(t)=(s\cos(2\pi t),s\sin(2\pi t),\sqrt{1+s^2})$, $t\in[0,1]$. 对于和乐 $f_s=P_{\gamma_s}$, 计算其首项. 换言之, 求正数 k 和矩阵 A, 使得 $f_s=\mathrm{Id}+s^kA+o(s^k)$.

解. (a) 利用"球极投影"可以得到图卡 $(x,y,z)\in H_+^2\mapsto(u,v)=(\frac{x}{1+z},\frac{y}{1+z})\in D^2$, 其逆映射为 $(x,y,z)=\frac{1}{1-u^2-v^2}(2u,2v,1+u^2+v^2)$. 此时 $\begin{cases}\frac{\partial}{\partial u}=\frac{2}{(1-u^2-v^2)^2}(1+u^2-v^2,2uv,2u)\\\frac{\partial}{\partial v}=\frac{2}{(1-u^2-v^2)^2}(2uv,1-u^2+v^2,2v)\end{cases}$ 构成标架, 相应的 Riemann 度量为 $\begin{pmatrix}g_{uu}&g_{uv}\\g_{vu}&g_{vv}\end{pmatrix}=\dfrac{4}{(1-u^2-v^2)^2}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, 确实正定. (Poincaré 圆盘)

(b) 矩阵求逆得到 $\begin{pmatrix}g^{uu}&g^{uv}\\g^{vu}&g^{vv}\end{pmatrix}=\dfrac{(1-u^2-v^2)^2}{4}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$. 经计算,

$\Gamma_{u;u}^u=\frac12\big(g^{uu}(2\frac{\partial g_{uu}}{\partial u}-\frac{\partial g_{uu}}{\partial u})+g^{uv}(2\frac{\partial g_{uv}}{\partial u}-\frac{\partial g_{uu}}{\partial v})\big)=\frac{2u}{1-u^2-v^2}$,

$\Gamma_{u;v}^u=\Gamma_{v;u}^u=\frac12\big(g^{uu}(\frac{\partial g_{uu}}{\partial v}+\frac{\partial g_{vu}}{\partial u}-\frac{\partial g_{uv}}{\partial u})+g^{uv}(\frac{\partial g_{uv}}{\partial v}+\frac{\partial g_{vv}}{\partial u}-\frac{\partial g_{uv}}{\partial v})\big)=\frac{2v}{1-u^2-v^2}$,

$\Gamma_{v;v}^u=\frac12\big(g^{uu}(2\frac{\partial g_{vu}}{\partial v}-\frac{\partial g_{vv}}{\partial u})+g^{uv}(2\frac{\partial g_{vv}}{\partial v}-\frac{\partial g_{vv}}{\partial v})\big)=-\frac{2u}{1-u^2-v^2}$,

$\Gamma_{u;u}^v=\frac12\big(g^{vu}(2\frac{\partial g_{uu}}{\partial u}-\frac{\partial g_{uu}}{\partial u})+g^{vv}(2\frac{\partial g_{uv}}{\partial u}-\frac{\partial g_{uu}}{\partial v})\big)=-\frac{2v}{1-u^2-v^2}$,

$\Gamma_{u;v}^v=\Gamma_{v;u}^v=\frac12\big(g^{vu}(\frac{\partial g_{uu}}{\partial v}+\frac{\partial g_{vu}}{\partial u}-\frac{\partial g_{uv}}{\partial u})+g^{vv}(\frac{\partial g_{uv}}{\partial v}+\frac{\partial g_{vv}}{\partial u}-\frac{\partial g_{uv}}{\partial v})\big)=\frac{2u}{1-u^2-v^2}$,

$\Gamma_{v;v}^v=\frac12\big(g^{vu}(2\frac{\partial g_{vu}}{\partial v}-\frac{\partial g_{vv}}{\partial u})+g^{vv}(2\frac{\partial g_{vv}}{\partial v}-\frac{\partial g_{vv}}{\partial v})\big)=\frac{2v}{1-u^2-v^2}$.

(c) 在 D^2 中, 任取点 $p=(a,0)$, 其中 $a\in(0,1)$. 设曲线 $\gamma(t)=(u(t),v(t))$ 连接 0_2 和 p. 易见 $|\gamma'(t)|=\frac{2\sqrt{u'(t)^2+v'(t)^2}}{1-u(t)^2-v(t)^2}\geq\frac{2u'(t)}{1-u(t)^2}$, 故 $L(\gamma)=\int|\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t\geq\int_{0_2}^p\frac{2\,\mathrm{d}u}{1-u^2}=(\log\frac{1+u}{1-u})|_0^a=\log\frac{1+a}{1-a}$, 并且等号成立条件为 $v(t)\equiv0$, 这必定是测地线满足的性质. (事实上, 解测地线方程可以得到 $t\mapsto(\frac{\mathrm{e}^t-1}{\mathrm{e}^t+1},0)$ 实现最小长度.) 利用 (D^2,g) 的旋转对称性, 任一经过 0_2 的测地线都是包含 z 轴的平面与 D^2 的交线. 通过坐标映射拉回到 H_+^2, 即证所欲. 参看陈维桓《黎曼几何引论》第三章例 1.3.

(d) 注意 $\gamma_s(t)$ 在 D^2 中的坐标为 $(u_s(t),v_s(t))=\frac{s}{1+\sqrt{1+s^2}}(\cos(2\pi t),\sin(2\pi t))$, 满足 $u_s(t)^2+v_s(t)^2=\frac{s^2}{2+2\sqrt{1+s^2}+s^2}$. 我们有 $\gamma_s'(t)=2\pi(-v_s(t)\frac{\partial}{\partial u}+u_s(t)\frac{\partial}{\partial v})|_{\gamma_s(t)}$, 进而

$\nabla_{\gamma_s'(t)}\frac{\partial}{\partial u}=2\pi\big(-v_s(t)(\Gamma_{u;u}^u\frac{\partial}{\partial u}+\Gamma_{u;u}^v\frac{\partial}{\partial v})+u_s(t)(\Gamma_{u;v}^u\frac{\partial}{\partial u}+\Gamma_{u;v}^v\frac{\partial}{\partial v})\big)\big|_{\gamma_s(t)}=\frac{2\pi s^2}{1+\sqrt{1+s^2}}\frac{\partial}{\partial v}|_{\gamma_s(t)}$,

$\nabla_{\gamma_s'(t)}\frac{\partial}{\partial v}=2\pi\big(-v_s(t)(\Gamma_{v;u}^u\frac{\partial}{\partial u}+\Gamma_{v;u}^v\frac{\partial}{\partial v})+u_s(t)(\Gamma_{v;v}^u\frac{\partial}{\partial u}+\Gamma_{v;v}^v\frac{\partial}{\partial v})\big)\big|_{\gamma_s(t)}=-\frac{2\pi s^2}{1+\sqrt{1+s^2}}\frac{\partial}{\partial u}|_{\gamma_s(t)}$.

设 $\xi(t)=\varphi(t)\frac{\partial}{\partial u}|_{\gamma_s(t)}+\psi(t)\frac{\partial}{\partial v}|_{\gamma_s(t)}$ 沿 γ_s 平行, 则

$$0\equiv\nabla_{\gamma_s'(t)}\xi=\big(\varphi'(t)-\tfrac{2\pi s^2}{1+\sqrt{1+s^2}}\psi(t)\big)\tfrac{\partial}{\partial u}|_{\gamma_s(t)}+\big(\psi'(t)+\tfrac{2\pi s^2}{1+\sqrt{1+s^2}}\varphi(t)\big)\tfrac{\partial}{\partial v}|_{\gamma_s(t)},$$

解得 $\varphi(t)=r\sin(\frac{2\pi s^2}{1+\sqrt{1+s^2}}t+\theta)$ 和 $\psi(t)=r\cos(\frac{2\pi s^2}{1+\sqrt{1+s^2}}t+\theta)$, 其中 r 和 θ 是初值确定的参数. 由此,

$$\begin{cases}\varphi(1)=r\sin(\theta)\cos(\frac{2\pi s^2}{1+\sqrt{1+s^2}})+r\cos(\theta)\sin(\frac{2\pi s^2}{1+\sqrt{1+s^2}})=\varphi(0)+\psi(0)\pi s^2+o(s^2)\\ \psi(1)=r\cos(\theta)\cos(\frac{2\pi s^2}{1+\sqrt{1+s^2}})-r\sin(\theta)\sin(\frac{2\pi s^2}{1+\sqrt{1+s^2}})=\psi(0)-\varphi(0)\pi s^2+o(s^2)\end{cases}.$$ ////

习题 17.3. *对于截面值 1-形式 α 以及切向量场 ξ 和 η, 利用7.8推导 $\langle\nabla\alpha,\xi,\eta\rangle$ 的计算公式.*

解. 设 $\{e_i\}$ 是标架, 相应的联络形式为 ω_j^i. 表 $\alpha=\alpha^ie_i$, 则 $\nabla\alpha=(\mathrm{d}\alpha^i+\omega_j^i\wedge\alpha^j)e_i$, 进而 $\langle\nabla\alpha,\xi,\eta\rangle=(\partial_\xi\langle\alpha^i,\eta\rangle-\partial_\eta\langle\alpha^i,\xi\rangle-\langle\alpha^i,[\xi,\eta]\rangle+\langle\omega_j^i,\xi\rangle\langle\alpha^j,\eta\rangle-\langle\omega_j^i,\eta\rangle\langle\alpha^j,\xi\rangle)e_i=\nabla_\xi\langle\alpha,\eta\rangle-\nabla_\eta\langle\alpha,\xi\rangle-\langle\alpha,[\xi,\eta]\rangle$. 对于截面值 k-形式, Cartan 公式也有类似的推广 (只需将外微分 d 改为协变微分 ∇). ////

注. 考虑 $\alpha=\nabla s$, 其中 s 是截面, 则有 $\langle\nabla^2s,\xi,\eta\rangle=\nabla_\xi\nabla_\eta s-\nabla_\eta\nabla_\xi s-\nabla_{[\xi,\eta]}s$.

定义 17.21 (曲率). 在向量丛 (E,M,π) 上, 联络 ∇ 诱导的**曲率**定义为 $R(\xi,\eta)=[\nabla_\xi,\nabla_\eta]-\nabla_{[\xi,\eta]}\in\mathrm{End}(\Gamma(E))$, 其中 ξ 和 η 是 M 上的切向量场.

命题 17.22. *$R(\xi,\eta)s=\langle\nabla^2s,\xi,\eta\rangle$, 其中 s 是截面, ξ 和 η 是切向量场.*

定义 17.23 (曲率形式). 取定 (局部) 标架 $\{e_i\}$, 通过 $R(\xi,\eta)e_j=\langle\Omega_j^i,\xi,\eta\rangle e_i$ 定义 2-形式 Ω_j^i.
称 Ω_j^i 为**曲率形式**, $\Omega=(\Omega_j^i)$ 为**曲率矩阵**.

注 17.24 (第二 Cartan 结构方程). $\Omega_j^i=\mathrm{d}\omega_j^i+\omega_k^i\wedge\omega_j^k$, 简记为 $\Omega=\mathrm{d}\omega+\omega\wedge\omega$. (第一结构方程见18.2.)

命题 17.25 (第二 Bianchi 恒等式). *$\mathrm{d}\Omega_j^i+\omega_k^i\wedge\Omega_j^k=\Omega_k^i\wedge\omega_j^k$, 简记为 $\mathrm{d}\Omega+\omega\wedge\Omega=\Omega\wedge\omega$.*

证明. 对 $\Omega_j^ie_i=\nabla(\omega_j^ie_i)$ 继续求协变微分. □

定义 17.26 (曲率系数). 在图卡 (U,x) 里, 令 $R_{j;k,\ell}^i=\langle\Omega_j^i,\frac{\partial}{\partial x^k},\frac{\partial}{\partial x^\ell}\rangle$, 称为**曲率系数**.

注 17.27. 记 $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}}e_j=\Gamma_{j;k}^ie_i$, 即 $\Gamma_{j;k}^i=\langle\omega_j^i,\frac{\partial}{\partial x^k}\rangle$, 则 $R_{j;k,\ell}^i=\frac{\partial\Gamma_{j;\ell}^i}{\partial x^k}-\frac{\partial\Gamma_{j;k}^i}{\partial x^\ell}+\Gamma_{m;k}^i\Gamma_{j;\ell}^m-\Gamma_{m;\ell}^i\Gamma_{j;k}^m$.

命题 17.28 (曲率的几何含义). *设 E 是 M 上的向量丛, $f:\mathbb{R}^2\to M$ 是光滑映射. 记 $f(0,0)=p$, $f_*(\partial_1|_0)=\xi$, $f_*(\partial_2|_0)=\eta$. 定义 $P_{t^1,t^2}=P_{\gamma_{t^1,t^2}}\in\mathrm{Hol}_p(\nabla)$, 其中 γ_{t^1,t^2} 由下述 "矩形的边" 连接而成: ① $\gamma_\to:\tau\in[0,t^1]\mapsto f(\tau,0)\in M$; ② $\gamma_\uparrow:\tau\in[0,t^2]\mapsto f(t^1,\tau)\in M$; ③ $\gamma_\leftarrow:\tau\in[0,t^1]\mapsto f(t^1-\tau,t^2)\in M$; ④ $\gamma_\downarrow:\tau\in[0,t^2]\mapsto f(0,t^2-\tau)\in M$. 任取 $e\in E_p$, 有 $P_{t^1,t^2}e=e-t^1t^2R(\xi,\eta)e+o(t^1t^2)$.*

证明. 令 $s|_{(t^1,t^2)}=P_{\gamma_\uparrow}P_{\gamma_\to}e$, 将 (t^1,t^2) 视为变量, 即得截面 $s\in\Gamma(f^*E)$. 易见 $\nabla_{\partial_2}s\equiv0$ 和 $[\partial_1,\partial_2]\equiv0$, 因而 $R(\partial_1,\partial_2)s=(\nabla_{\partial_1}\nabla_{\partial_2}-\nabla_{\partial_2}\nabla_{\partial_1}-\nabla_{[\partial_1,\partial_2]})s=-\nabla_{\partial_2}\nabla_{\partial_1}s$. 利用协变导数的几何解释, 则有 $R(\xi,\eta)e=R(\partial_1,\partial_2)s|_{0_2}=-(\nabla_{\partial_2}\nabla_{\partial_1}s)|_{0_2}=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t^2}\big|_0P_{\gamma_\downarrow}(\nabla_{\partial_1|_{(0,t^2)}}s)=-\lim_{t^2\to0}\frac{1}{t^2}P_{\gamma_\downarrow}(\nabla_{\partial_1|_{(0,t^2)}}s)$, 其中用到 $\nabla_{\partial_1|_{0_2}}s=0$. 而 $\nabla_{\partial_1|_{(0,t^2)}}s=\frac{\partial}{\partial t^1}\big|_{(0,t^2)}P_{\gamma_\leftarrow}(s|_{(t^1,t^2)})$, 故 $R(\xi,\eta)e=-\lim_{t^1,t^2\to0}\frac{1}{t^1t^2}\big(P_{t^1,t^2}e-e\big)$. □

定义 17.29 (Ricci 曲率和标量曲率). 设 (M,g) 是 Riemann 流形, R 是 Levi–Civita 联络诱导的曲率. 任意取定正交标架场 $\{e_i\}$. 称 $\mathrm{Ric}(u)=\sum_iR(u,e_i)e_i$ 和 $\mathrm{Ric}(u,v)=g(\mathrm{Ric}(u),v)$ 为 **Ricci 曲率**, 其中 u 和 v 是切向量. 称 $S=\sum_i\mathrm{Ric}(e_i,e_i)$ 为**标量曲率**.

命题 17.30. *若联络与度量相容, 则正交标架场给出的曲率形式矩阵 $\Omega=(\Omega_j^i)$ 反对称, 即 $\Omega_i^j=-\Omega_j^i$.*

证明. 对第二 Cartan 结构方程应用命题16.30. □

18 仿射联络拾遗 (2021 年 6 月 16 日)

在配备仿射联络 ∇ 的流形上, 取 (局部) 标架场 $\{e_i\}$, 其对偶余标架场记为 $\{\theta^i\}$. 设 $[e_i,e_j]=c_{ij}^k e_k$ 和 $\nabla_{e_k}e_j=\Gamma_{jk}^i e_i$. 我们有 $\mathrm{d}\theta^k=-\sum_{i<j}c_{ij}^k\theta^i\wedge\theta^j$ 和 $\nabla e_j=\omega_j^i e_i$, 其中 $\omega_j^i=\Gamma_{jk}^i\theta^k$ 是联络形式.

设 T 和 R 分别是 ∇ 诱导的挠率和曲率, Ω_j^i 是曲率形式, 即 $R(\xi,\eta)e_j=\Omega_j^i(\xi,\eta)e_i$.

定义 18.1 (挠率形式)**.** 通过 $T(\xi,\eta)=\tau^i(\xi,\eta)e_i$ 定义 $\tau^i\in\Omega^2$, 称为**挠率形式**.

命题 18.2 (第一 Cartan 结构方程)**.** *$\tau^i=\mathrm{d}\theta^i+\omega_j^i\wedge\theta^j$, 简记为 $\tau=\mathrm{d}\theta+\omega\wedge\theta$. (第二结构方程见 17.24.)*

证明. 任取 $k<\ell$. 直接计算可得 $\langle\tau^i,e_k,e_\ell\rangle=\theta^i(\nabla_{e_k}e_\ell-\nabla_{e_\ell}e_k-[e_k,e_\ell])=\langle\omega_\ell^i,e_k\rangle-\langle\omega_k^i,e_\ell\rangle-c_{k\ell}^i$, 其中 $\langle\omega_\ell^i,e_k\rangle-\langle\omega_k^i,e_\ell\rangle=\langle\omega_j^i,e_k\rangle\delta_\ell^j-\langle\omega_j^i,e_\ell\rangle\delta_k^j=\langle\omega_j^i,e_k\rangle\langle\theta^j,e_\ell\rangle-\langle\omega_j^i,e_\ell\rangle\langle\theta^j,e_k\rangle=\langle\omega_j^i\wedge\theta^j,e_k,e_\ell\rangle$, 而 $-c_{k\ell}^i=-\sum_{\lambda<\mu}c_{\lambda\mu}^i\delta_k^\lambda\delta_\ell^\mu=-\sum_{\lambda<\mu}c_{\lambda\mu}^i\langle\theta^\lambda\wedge\theta^\mu,e_k,e_\ell\rangle=\langle\mathrm{d}\theta^i,e_k,e_\ell\rangle$. □

命题 18.3 (第一 Bianchi 恒等式)**.** *$\mathrm{d}\tau^i+\omega_j^i\wedge\tau^j=\Omega_j^i\wedge\theta^j$, 简记为 $\mathrm{d}\tau+\omega\wedge\tau=\Omega\wedge\theta$.*

证明. 对 $\tau^i e_i=\nabla(\theta^i e_i)$ 继续求协变微分. □

推论 18.4. *若 ∇ 无挠, 则 $R(\xi,\eta)\zeta+R(\eta,\zeta)\xi+R(\zeta,\xi)\eta=0$, 其中 ξ,η,ζ 是任意切向量场.*

证明. $R(\xi,\eta)\zeta=\Omega_j^i(\xi,\eta)\theta^j(\zeta)e_i$. □

The End ☕

A 期末试题 (2021 年 6 月 30 日)

题 1 (10'). 叙述切向量场版本和余切向量场版本的 Frobenius 定理.

题 2 (15'). 设 ξ 和 η 是光滑切向量场, 分别生成单参数变换群 $\{F_t\}$ 和 $\{G_t\}$. 证明 $F_t \circ G_t \equiv G_t \circ F_t$ 当且仅当 $[\xi, \eta] \equiv 0$.

题 3 (10'). 设 (M, g) 是 Riemann 流形, f 是 M 上的光滑函数. 考虑梯度 $\mathrm{grad}(f) = g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j}$. 当 $\mathrm{grad}(f)$ 非零时, 证明 $\mathrm{grad}(f)$ 指向 f 增加得最快的方向. 换言之, 记 $\xi = \mathrm{grad}(f)/|\mathrm{grad}(f)|$, 则对任意长度为 1 的切向量 η 成立 $\langle \mathrm{d}f, \xi \rangle \geq \langle \mathrm{d}f, \eta \rangle$.

题 4 (20'). 对于 Heisenberg 群 H^3,

(1) 求其 Lie 代数 $\mathfrak{h}^3$; (2) 写出伴随表示 Ad 的矩阵表示; (3) 求 $\mathfrak{h}^3$-值 Maurer–Cartan 形式.

题 5 (15'). 设 (M, g) 是 Riemann 流形, ξ 是 M 上的切向量场, D 是 M 的正则积分区域. 证明 $\int_{\partial D} g(\xi, \vec{n})\sigma = \int_D L_\xi \omega$, 其中 $\vec{n}$ 是 ∂D 的单位外法向量, σ 是 ∂D 的体积形式, ω 是 M 的体积形式.

题 6 (15'). 在 S^2 上通过 $\mathbb{R}^3$ 的标准内积诱导 Riemann 度量. 求 Levi–Civita 联络的联络形式矩阵.

题 7 (15'). 设 $\{\xi_i\}$ 是标架场, $\{\theta^i\}$ 是其对偶的余标架场. 对于仿射联络 ∇, 记 $\nabla_{\xi_k} \xi_j = \Gamma^i_{jk} \xi_i$, 则联络形式为 $\omega^i_j = \Gamma^i_{jk} \theta^k$.

(1) 证明 $(\mathrm{d}\theta^i + \omega^i_j \wedge \theta^j)\xi_i$ 是挠率张量.

(2) 证明 $(\mathrm{d}\omega^i_j + \omega^i_k \wedge \omega^k_j) E^j_i$ 是曲率张量, 其中 $E^j_i : a^k \xi_k \mapsto a^j \xi_i$.

B 后续资料

本笔记发布于 https://zhuanlan.zhihu.com/p/361032775, 欢迎留言补充.

微分拓扑

- https://folk.ntnu.no/gereonq/TMA4192_Lecture_Notes.pdf
- https://arxiv.org/pdf/1907.10297.pdf
- http://math.stanford.edu/~ralph/math215b/

微分形式

- https://math.mit.edu/classes/18.952/
- https://www.groups.ma.tum.de/algebra/scheimbauer/advanced-topics-in-algebraic-topology/
- https://www.math.cuhk.edu.hk/course_builder/1617/math6021b/Lec080421%20Bott%20Tu.pdf

李群

- http://staff.ustc.edu.cn/~wangzuoq/Courses/13F-Lie/Lie.html
- https://people.maths.ox.ac.uk/ritter/lie-groups.html
- https://mtaylor.web.unc.edu/notes/lie-groups-and-representation-theory/

黎曼几何

- http://staff.ustc.edu.cn/~spliu/Teach_RG2020.html
- https://metaphor.ethz.ch/x/2020/fs/401-3532-08L/
- https://web.math.ucsb.edu/~moore/riemanniangeometry.pdf

理论物理

- https://jfi.uchicago.edu/~tten/teaching/Physics.316/
- http://wwwf.imperial.ac.uk/~dholm/classnotes/
- https://www.math.ucdavis.edu/~casals/Teaching/Fall20/MAT265/Fall20MAT265.html

信息几何

- http://bicmr.pku.edu.cn/~dongbin/Conferences/Mini-Course-IG/
- http://image.diku.dk/MLLab/IG1.php
- https://www.mdpi.com/1099-4300/22/10/1100/htm