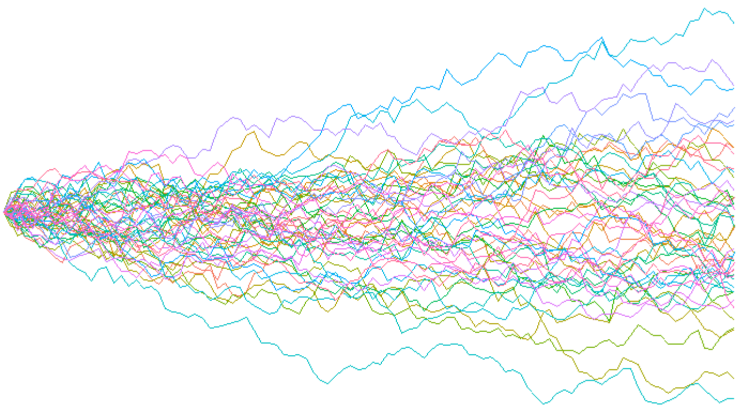
随机分析

授课教师: 刘勇　　打字人: Li, T.-Y.*

2021 秋

先修要求: 测度论、概率论、随机过程、微分方程



参考文献

[1] I. Karatzas; S.E. Shreve. (1998). *Brownian Motion and Stochastic Calculus* (2nd ed.). Springer.

[2] 龚光鲁; 钱敏平. (2019). 随机微分方程引论（第 3 版）. 电子工业出版社.

[3] D. Revuz; M. Yor. (2005). *Continuous Martingales and Brownian Motion* (3rd ed.). Springer.

[4] K.L. Chung; R.J. Williams. (1990). *Introduction to Stochastic Integration* (2nd ed.). Birkhäuser.
龚光鲁. (2021). 钟开莱随机积分导论 第 2 版. 世界图书出版公司.

[5] J.-F. Le Gall. (2016). *Brownian Motion, Martingales, and Stochastic Calculus*. Springer.

[6] P. Medvegyev. (2007). *Stochastic Integration Theory*. Oxford University Press.

[7] P.J.C. Spreij. https://staff.fnwi.uva.nl/p.j.c.spreij/onderwijs/master/si.pdf

[8] D. Chafaï. https://djalil.chafai.net/docs/M2/m2-stochastic-calculus-course-2020-2021.pdf

[9] R. Bauerschmidt. http://www.statslab.cam.ac.uk/~rb812/teaching/sc2020

[10] G. Lowther. https://almostsuremath.com/stochastic-calculus

*邮箱: kellty@pku.edu.cn

目录

0 引言 (2021 年 9 月 15 日 +22 日)

什么是随机分析

概率论归类于分析学. 比之微积分, 我们在随机分析中关心

1. 随机过程的构造: 用常见过程进行线性表示
2. 对鞅或半鞅的随机积分: 通过局部化推广
3. 随机 (偏) 微分方程
4. 非光滑分析: 局部时
5. 鞅性质在一些变换下的不变性

回顾: Brown 运动, Itô 随机积分

固定概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ 和滤流 $(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$. 以 $(B_t)_{t\geq 0}$ 记零初值标准 Brown 运动.

定理 0.1. *若零初值随机过程 $(X_t)_{t\geq 0}$ 具有独立平稳增量和连续轨道, 则存在常数 σ 和 b, 以及零初值标准 Brown 运动 $(\tilde{B}_t)_{t\geq 0}$, 使得 $X_t = \sigma \tilde{B}_t + bt$, $\forall t \geq 0$.*

引理 0.2 (二次变差)**.** *设 $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = T$, 则*

$$\mathbb{E}\big[|\textstyle\sum_{k=1}^m (B_{t_k} - B_{t_{k-1}})^2 - T|^2\big] = 2\textstyle\sum_{k=1}^m (t_k - t_{k-1})^2 \leq 2\max_k (t_k - t_{k-1})T.$$

令分划加细 $(\max_k (t_k - t_{k-1}) \to 0)$ 即得 L^2 收敛, 对于特定分划如 2^n-等分 $(n\to\infty)$ 有 a.s. 收敛.

注 0.3. 关键在于 $(B_t^2 - t)_{t\geq 0}$ 是鞅.

定理 0.4. *以概率一 Brown 运动的轨道在任何有限区间上都不是有界变差的.*

证明. $\sum_{k=1}^m (B_{t_k} - B_{t_{k-1}})^2 \leq \Xi \sum_{k=1}^m |B_{t_k} - B_{t_{k-1}}|$, 其中 $\Xi := \max_{1\leq k\leq m} |B_{t_k} - B_{t_{k-1}}| \xrightarrow{\text{a.s.}} 0$. □

例 0.5 ($\int_0^T B_t \,\mathrm{d}B_t$)**.** *令 $s_{k-1} := (1-\alpha)t_{k-1} + \alpha t_k$, 其中 $\alpha \in [0,1]$ 是常数, 则*

$$\textstyle\sum_{k=1}^m B_{s_{k-1}} (B_{t_k} - B_{t_{k-1}}) \xrightarrow{L^2} \frac{1}{2} B_T^2 + (\alpha - \frac{1}{2})T.$$

定义 0.6 (Itô 积分)**.** 可料阶梯过程 $H_t = H_0 \mathbb{1}_{\{0\}}(t) + \sum_{k=1}^m H_{t_{k-1}} \mathbb{1}_{(t_{k-1}, t_k]}(t)$ 的 Itô 积分为

$$\textstyle\int_0^T H_t \,\mathrm{d}B_t := \sum_{k=1}^m H_{t_{k-1}} (B_{t_k} - B_{t_{k-1}}).$$

一般的循序可测过程的 Itô 积分为其可料阶梯过程近似的 Itô 积分的 L^2 极限.

命题 0.7. *Itô 积分满足: 可测、线性、可加.*

命题 0.8. *设 $(H_t)_{t\geq 0}$ 是循序可测过程. 在适当的可积性条件下:*

- $\big(\int_0^t H_s \,\mathrm{d}B_s\big)_{t\geq 0}$ *是连续鞅, 特别地有: $\mathbb{E}\int_0^t H_s \,\mathrm{d}B_s = 0$.*
- $\big((\int_0^t H_s \,\mathrm{d}B_s)^2 - \int_0^t H_s^2 \,\mathrm{d}s\big)_{t\geq 0}$ *是连续鞅, 特别地有* ***Itô 等距****: $\mathbb{E}\big[(\int_0^t H_s \,\mathrm{d}B_s)^2\big] = \mathbb{E}\int_0^t H_s^2 \,\mathrm{d}s$.*
- $\big(\mathrm{e}^{\int_0^t H_s \,\mathrm{d}B_s - \frac{1}{2}\int_0^t H_s^2 \,\mathrm{d}s}\big)_{t\geq 0}$ *是连续鞅, 特别地有: $\mathbb{E}\,\mathrm{e}^{\int_0^t H_s \,\mathrm{d}B_s} = \mathbb{E}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\int_0^t H_s^2 \,\mathrm{d}s}$.*

随机微分方程

定理 0.9. *给定 Brown 运动 $(B_t)_{t\ge 0}$，考察 $\mathrm{d}X_t = \sigma(t,X_t)\,\mathrm{d}B_t + b(t,X_t)\,\mathrm{d}t$. 若 σ 和 b 满足 Lipschitz 条件，则存在唯一的局部解 $(X_t)_{t\in[0,\epsilon]}$；进一步地，若 σ 和 b 还满足线性增长条件，则有全局解 $(X_t)_{t\ge 0}$.*

注 0.10. 与此相对地，给定随机过程 $(X_t)_{t\ge 0}$，我们关心如何简单地表示 X_t，比如能否构造 Brown 运动 $(B_t)_{t\ge 0}$ 使得 $\mathrm{d}X_t = \sigma(t,X_t)\,\mathrm{d}B_t + b(t,X_t)\,\mathrm{d}t$.

1 基本概念 (2021 年 9 月 22 日)

定义 1.1 (随机过程相等). 两个随机过程 (X_t) 和 (Y_t)

- **(有限维) 分布相同**，若 $(X_{t_1},\dots,X_{t_m}) \overset{d}{=} (Y_{t_1},\dots,Y_{t_m})$, $\forall t_1<\cdots<t_m$, $\forall m\ge 1$;
- 互为**修正**，若 $\mathbb{P}\{X_t = Y_t\} = 1$, $\forall t$;
- **不可区分**，若 $\mathbb{P}\{X_t = Y_t,\ \forall t\} = 1$.

注 1.2. 不可区分的随机过程必然互为修正. 互为修正的随机过程必然有相同的有限维分布.

例 1.3. *设 $(B_t)_{t\ge 0}$ 是零初值标准 Brown 运动. 令 $\tilde{B}_t := B_t \mathbb{1}_{[t\ne\tau]}$，其中 $\tau := \inf\{t\ge 0 : |B_t| = 1\}$. 易得 $(\tilde{B}_t)_{t\ge 0}$ 和 $(B_t)_{t\ge 0}$ 互为修正，但不是不可区分的.*

例 1.4. *记 $\gamma(\mathrm{d}x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x$ 和 $p_t(x,\mathrm{d}y) := \gamma(\mathrm{d}\frac{y-x}{\sqrt{t}})$.*

- *在 $(\mathbb{R}^\infty, \mathscr{B}_{\mathbb{R}}^\infty, \gamma^\infty)$ 上定义 $\xi_n(\omega_1,\omega_2,\dots) = \omega_n$，则 $\xi_n \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$. 令 $X_t := \sum_{n=1}^\infty \sqrt{2}\frac{\sin((n-\frac12)\pi t)}{(n-\frac12)\pi}\xi_n$，则 $(X_t)_{t\in[0,1]}$ 与零初值标准 Brown 运动有限维分布相同.* (Karhunen–Loève)
- *在 $C([0,1];\mathbb{R})$ 上配备一致范数 $\|w\| := \max_{t\in[0,1]}|w(t)|$，诱导拓扑及 Borel 代数. 存在概率测度 $\mathbb{P}^W$ 适合 $\mathbb{P}^W\{w\in C([0,1];\mathbb{R}) : w(t_1)\in A_1,\dots,w(t_m)\in A_m\} = \int_{A_1\times\cdots\times A_m}\prod_{k=1}^m p_{t_k-t_{k-1}}(x_{k-1},\mathrm{d}x_k)$, $\forall 0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m \le 1$, $\forall A_1,\dots,A_m\in\mathscr{B}_{\mathbb{R}}$, $\forall m\ge 1$，其中 $x_0 = 0$. 令 $W_t(w) := w(t)$，则 $(W_t)_{t\in[0,1]}$ 是 $C([0,1];\mathbb{R})$ 上的零初值标准 Brown 运动.* (Wiener)

不同概率空间上的随机过程可以有相同的有限维分布，也只能在分布上进行比较.

定义 1.5 (通常条件). 概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},\mathbb{P})$ 上的滤流 $(\mathscr{F}_t)_{t\ge 0}$ 的**通常条件**指的是

- (完备) 所有 $\mathbb{P}$-零测集都在 $\mathscr{F}_0$ 中,
- (右连续) $\mathscr{F}_t = \mathscr{F}_t^+ := \bigcap_{u>t}\mathscr{F}_u$, $\forall t$.

注 1.6. 滤流 $(\mathscr{F}_t^+)_{t\ge 0}$ 总是右连续的.

定义 1.7 (停时). 给定滤流 $(\mathscr{F}_t)_{t\ge 0}$，非负随机变量 τ 为

- **可选时**，若 $\{\tau < t\}\in\mathscr{F}_t$, $\forall t$;
- **停时**，若 $\{\tau\le t\}\in\mathscr{F}_t$, $\forall t$.

命题 1.8. *停时总是可选时. 如果滤流右连续，那么可选时是停时.*

证明. 一方面，$\{\tau<t\} = \bigcup_{n=1}^\infty\{\tau\le t-\frac1n\}$. 另一方面，$\{\tau\le t\} = \bigcap_{n=1}^\infty\{\tau<t+\frac1n\}$. □

习题 1.1 (首中时, [1]: 1.2.6, 1.2.7). 设 $(\xi_t)_{t\geq 0}$ 是定义在带滤流 $(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$ 的概率空间上取值于完备可分度量空间 (S,d) 的轨道右连续的随机过程. 证明: 若 G 是开集, 则 $\tau := \inf\{t>0 : \xi_t \in G\}$ 是可选时; 若 (ξ_t) 的轨道是连续的, F 是闭集, 则 $\tau' := \inf\{t>0 : \xi_t\in F\}$ 是停时.

证明. 利用轨道右连续性, $\{\tau<t\} = \bigcup_{r\in(0,t)\cap\mathbb{Q}}\{\xi_r\in G\}\in\mathscr{F}_t$. 令 $\tau_n := \inf\{t>0:\xi_t\in G_n\}$, 其中 $G_n := \{x\in S : d(x,F)<\frac{1}{n}\}$ 是开集. 设 $(\xi_t)_{t\geq0}$ 轨道连续, 往证 $\{\tau'\leq t\} = \bigcap_{n=1}^\infty\{\tau_n<t\}$. 由 $G_1\supset G_2\supset\cdots\supset F$ 可得 $\tau_n\nearrow\tau^*\leq\tau'$. 在 $\{\tau^*<\infty\}\subset\{\tau'<\infty\}$ 上, 有 $\xi_{\tau^*}\in\bigcap_{n=1}^\infty\overline{G_n}=F$, 从而 $\tau'\leq\tau^*$. 在 $\{\tau_n<\infty\}\subset\{\tau^*<\infty\}$ 上, 有 $\xi_{\tau_n}\in\partial G_n = \{x\in S: d(x,F)=\frac{1}{n}\}$, 从而 $\tau_n<\tau'=\tau^*$. ∎

设 $X=(X_t)_{t\geq0}$ 是轨道 a.s. 右连左极的随机过程, $A := \{X \text{ 在 } [0,t_0) \text{ 上连续}\}$. 证明:

习题 1.2 ([1] 1.1.7). 如果 X 的每条轨道都是右连左极的, 那么 $A\in\mathscr{F}_{t_0}^X := \sigma(X_s : 0\leq s\leq t_0)$.

证明.
$$
\begin{aligned}
A^\complement &= \bigcup_{t\in(0,t_0)}\{\lim_{\mathbb{Q}\ni q\nearrow t}X_q \neq \lim_{\mathbb{Q}\ni r\searrow t}X_r\} \\
&= \bigcup_{t\in(0,t_0)}\bigcup_{n\geq1}\{\lim_{\mathbb{Q}\ni q\nearrow t}\lim_{\mathbb{Q}\ni r\searrow t}|X_q-X_r|>\tfrac{1}{n}\} \\
&\subset \bigcup_{n\geq1}\bigcap_{m\geq1}\bigcup_{q,r\in(0,t_0)\cap\mathbb{Q}:|q-r|<\frac{1}{m}}\{|X_q-X_r|>\tfrac{1}{n}\} \quad \in\mathscr{F}_{t_0}^X \\
&\subset \bigcup_{n\geq1}\bigcup_{t\in[0,t_0]}\bigcup_{(0,t_0)\ni q_j\to t}\bigcup_{(0,t_0)\ni r_j\to t}\bigcap_{j\geq1}\{|X_{q_j}-X_{r_j}|>\tfrac{1}{n}\} \\
&= \bigcup_{t\in[0,t_0]}\{\limsup_{(0,t_0)\ni s\to t}X_s\neq\liminf_{(0,t_0)\ni s\to t}X_s\} = A^\complement.
\end{aligned}
$$
∎

习题 1.3 ([1] 1.1.8). 可能有 $A\notin\mathscr{F}_{t_0}^X$. 如果 X 适应于滤流 $(\mathscr{F}_t)_{t\geq0}$, 且 $\mathscr{F}_{t_0}$ 完备, 那么 $A\in\mathscr{F}_{t_0}$.

证明. 令 $C := \{X \text{ 右连左极}\}$.

在 $(\Omega,\mathscr{F}) = (\mathbb{R},\mathscr{B}_\mathbb{R})$ 上定义 $\mathbb{P}(B) := \int_0^1 \mathbb{1}_B(\omega)\,\mathrm{d}\omega$, 考察 $X_t(\omega) = \mathbb{1}_{[t=\omega>1]}$, 可见 $C^\complement = (1,\infty)$ 是 $\mathbb{P}$-零测集. 置 $t_0=2$, 则有 $A^\complement = (1,2)$, 而 $\mathscr{F}_{t_0}^X = \sigma(\{\{t\}:1<t\leq2\})$ 只含至多可数集及其补集.

类似习题1.2可得 $A^\complement\cap C = C\cap\bigcup_{n\geq1}\bigcap_{m\geq1}\bigcup_{q,r\in(0,t_0)\cap\mathbb{Q}:|q-r|<\frac{1}{m}}\{|X_q-X_r|>\frac{1}{n}\}$. 若 $\mathscr{F}_{t_0}$ 完备, 则 $C^\complement$ 和 C 都在 $\mathscr{F}_{t_0}$ 中. 若还有 $\mathscr{F}_{t_0}^X\subset\mathscr{F}_{t_0}$, 则 $A^\complement\cap C\in\mathscr{F}_{t_0}$, 进而 $A = (A^\complement\cap C)^\complement\cap C\in\mathscr{F}_{t_0}$. ∎

2 随机过程 (2021 年 9 月 24 日)

固定概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},\mathbb{P})$ 和满足通常条件的滤流 $(\mathscr{F}_t)_{t\geq0}$.

定义 2.1 (可测性). 设 $X=(X_t)_{t\geq0}$ 是取值于可测空间 (S,Σ) 的随机过程. 称 X

- **可测**, 若 $(t,\omega)\in[0,\infty)\times\Omega\mapsto X_t(\omega)\in S$ 是 $(\mathscr{B}_{[0,\infty)}\otimes\mathscr{F})/\Sigma$ 可测映射;
- **适应**, 若 $\omega\in\Omega\mapsto X_t(\omega)\in S$ 是 $\mathscr{F}_t/\Sigma$ 可测映射, $\forall t$;
- **循序可测**, 若 $(s,\omega)\in[0,t]\times\Omega\mapsto X_s(\omega)\in S$ 是 $(\mathscr{B}_{[0,t]}\otimes\mathscr{F}_t)/\Sigma$ 可测映射, $\forall t$;
- **可料**, 若 $(t,\omega)\in[0,\infty)\times\Omega\mapsto X_t(\omega)\in S$ 是 $\mathscr{P}/\Sigma$ 可测映射, 其中
$$\mathscr{P} := \sigma(\{[0,\infty)\times A : A\in\mathscr{F}_0\}\cup\{(s,u]\times A : A\in\mathscr{F}_s,\ 0<s<u<\infty\}) \text{ 为**可料** } \sigma\text{-**代数**}.$$

命题 2.2. 可测适应随机过程必然存在循序可测修正.

命题 2.3. 轨道右连续的适应随机过程必然循序可测.

命题 2.4. 可料随机过程必然循序可测.

命题 2.5. $\mathscr{P} = \sigma($左连续适应随机过程$) = \sigma($左连右极适应随机过程$) = \sigma($连续适应随机过程$)$.

定义 2.6 (平方可积鞅). 设 $M = (M_t)$ 是 $(\mathscr{F}_t)$-鞅. 称 M **平方可积**, 若 $M_t \in L^2(\mathbb{P})$, $\forall t$. 记

- $\mathcal{M}^2 := \{$平方可积的零初值右连左极 $(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$-鞅$\}$, $\mathcal{M}^2_{\text{cts}} := \{M \in \mathcal{M}^2 : t \mapsto M_t$ 连续$\}$,
- $\mathcal{M}^2_T := \{$平方可积的零初值右连左极 $(\mathscr{F}_t)_{t\in[0,T]}$-鞅$\}$, $\mathcal{M}^2_{T,\text{cts}} := \{M \in \mathcal{M}^2_T : t \mapsto M_t$ 连续$\}$,
- $\mathcal{M}^2_\infty := \{M \in \mathcal{M}^2 : \sup_{t\geq 0} \mathbb{E}M_t^2 < \infty\}$, $\mathcal{M}^2_{\infty,\text{cts}} := \mathcal{M}^2_\infty \cap \mathcal{M}^2_{\text{cts}}$.

称 $\mathcal{M}^2_\infty$ 中的元素为**一致平方可积鞅**.

命题 2.7. $\mathcal{M}^2_\infty = \{(\mathbb{E}[M_\infty|\mathscr{F}_t])_{t\geq 0} : M_\infty \in L^2(\mathbb{P}), \mathbb{E}[M_\infty|\mathscr{F}_0] = 0\}$.

定理 2.8 (Doob–Meyer 分解). 设 $X = (X_t)_{t\geq 0}$ 是右连左极下鞅. 若 X 满足一定条件, 则存在唯一的鞅 $M = (M_t)_{t\geq 0}$ 和可料可积零初值右连续增过程 $A = (A_t)_{t\geq 0}$, 使得 $X = M + A$.

定义 2.9 (补偿子). 上述分解中, A 称为 X 的**补偿子**.

例 2.10. 速率 λ 的 *Poisson* 过程的补偿子为 $(\lambda t)_{t\geq 0}$.

定义 2.11 (尖括号过程). 对于 $M = (M_t)_{t\geq 0} \in \mathcal{M}^2$, 称 $(M_t^2)_{t\geq 0}$ 的补偿子为 M 的**特征**, 记作 $\langle M\rangle$.

例 2.12. 设 $B = (B_t)_{t\geq 0}$ 是标准 *Brown* 运动, 则 $\langle B\rangle_t = t$.

定理 2.13. 设 $M \in \mathcal{M}^2_{\text{cts}}$, 则 $t \mapsto \langle M\rangle_t$ 连续, 并且 $\langle M\rangle_t$ 是 $[0,t]$ 上 M 的**二次变差**的依概率极限.

习题 2.1. 证明: $(M,N) \mapsto \mathbb{E}M_T N_T$ 使 $\mathcal{M}^2_T$ 成为 *Hilbert* 空间, 并且 $\mathcal{M}^2_{T,\text{cts}}$ 是 $\mathcal{M}^2_T$ 的闭子空间.

证明. 不难验证内积性质, 下面考虑完备性. 任取 $M^{(n)} \in \mathcal{M}^2_T$ 适合 $M_T^{(m)} - M_T^{(n)} \xrightarrow[m,n\to\infty]{L^2(\mathbb{P})} 0$. 利用 Doob 极大不等式, $\sup_{t\in[0,T]}|M_t^{(m)} - M_t^{(n)}| \xrightarrow[m,n\to\infty]{L^2(\mathbb{P})} 0$, 进而存在 $n_1 < n_2 < \dots$ 和 $\mathbb{P}$-零测集 D 使得 $\left\{\sup_{t\in[0,T]}|M_t^{(n_j)} - M_t^{(n_k)}| \xrightarrow[j,k\to\infty]{} 0\right\} \supset D^\complement$. 令 $M_t := \lim_{k\to\infty} M_t^{(n_k)} \mathbb{1}_{D^\complement}$, 则 $M = (M_t)_{t\in[0,T]}$ 保持轨道连续性, 因为在 $D^\complement$ 上, $\sup_{u\in[0,T]}|M_u - M_u^{(n_k)}| \leq \liminf_{j\to\infty} \sup_{t\in[0,T]}|M_t^{(n_j)} - M_t^{(n_k)}| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$, 而

$$|M_t - M_s| \leq |M_t - M_t^{(n_k)}| + |M_t^{(n_k)} - M_s^{(n_k)}| + |M_s^{(n_k)} - M_s| \leq |M_t^{(n_k)} - M_s^{(n_k)}| + 2\sup_u|M_u - M_u^{(n_k)}|.$$

对任意 $t \in [0,T]$ 有 $L^2(\mathbb{P})\text{-}\lim_{n\to\infty} M_t^{(n)} \overset{\text{a.s.}}{=} \mathbb{P}\text{-}\lim_{k\to\infty} M_t^{(n_k)} = M_t$, 这还表明 M 是平方可积鞅, 因为只要 $s \leq t$ 就有 $\mathbb{E}M_t\mathbb{1}_A = \lim_{n\to\infty}\mathbb{E}M_t^{(n)}\mathbb{1}_A = \lim_{n\to\infty}\mathbb{E}M_s^{(n)}\mathbb{1}_A = \mathbb{E}M_s\mathbb{1}_A$, $\forall A \in \mathscr{F}_s$. ■

习题 2.2. 设 $N = (N_t)_{t\geq 0}$ 是速率参数为 λ 的 *Poisson* 过程, $\mathscr{F}_t = \mathscr{F}_t^N := \sigma(N_s : s \leq t)$.

1. 证明 $(N_t - \lambda t)_{t\geq 0}$ 是 $(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$-鞅;

   证明. 根据增量性质可得 $\mathbb{E}[N_t - N_s|\mathscr{F}_s] = \lambda(t-s)$, $\forall t > s$. ■

2. 求 $((N_t - \lambda t)^2)_{t\geq 0}$ 的 *Doob–Meyer* 分解;

   解. 记 $\tilde{N}_t := N_t - \lambda t$. 由 $\tilde{N}_t^2 = \tilde{N}_s^2 + 2\tilde{N}_s(\tilde{N}_t - \tilde{N}_s) + (\tilde{N}_t - \tilde{N}_s)^2$, 可得

   $$\mathbb{E}[\tilde{N}_t^2|\mathscr{F}_s] - \tilde{N}_s^2 = 2\tilde{N}_s\mathbb{E}(\tilde{N}_t - \tilde{N}_s) + \text{Var}(\tilde{N}_t - \tilde{N}_s) = \text{Var}(N_t - N_s) = \lambda(t-s), \ \forall t > s.$$

   于是 $\langle \tilde{N}\rangle_t = \lambda t$, 即 $(\tilde{N}_t^2 - \lambda t)_{t\geq 0}$ 是 $(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$-鞅. ////

3. 设 $X = (X_n)_{n\geq 0}$ 是 *i.i.d.* 随机变量序列, X_0 可积, 且 N 与 X 独立. 令 $Y_t := \sum_{n=0}^{N_t} X_n$, 则 $Y = (Y_t)_{t\geq 0}$ 称为**复合 Poisson 过程**. 求 Y 的 *Doob–Meyer* 分解.

   解. 令 $\mathscr{G}_t := \mathscr{F}_t^N \vee \sigma(X_{n\wedge N_t} : n \geq 0)$, 则 Y 适应于 $(\mathscr{G}_t)_{t\geq 0}$. 我们有 $Y_t - Y_s|\mathscr{G}_s \overset{d}{=} \sum_{n=1}^{N_t - N_s} X_n'$, 其中 $(X_n')_{n\geq 0}$ 是独立于 $\mathscr{G}_t$ 的 X 的同分布拷贝, 从而 $\mathbb{E}[Y_t - Y_s|\mathscr{G}_s] = \mathbb{E}\sum_{n=1}^{N_t-N_s} X_n' = \lambda(t-s)\mu$, $\forall t > s$, 其中 $\mu := \mathbb{E}X_0$. 因此, Y 的补偿子为 $(\mu\lambda t)_{t\geq 0}$, 即 $(Y_t - \mu\lambda t)_{t\geq 0}$ 是 $(\mathscr{G}_t)_{t\geq 0}$-鞅. ////

3 随机过程 · 续 (2021 年 9 月 27 日)

定义 3.1 (互特征). $\langle M, N\rangle := \frac{1}{4}\big(\langle M+N\rangle - \langle M-N\rangle\big)$ 称为 $M, N \in \mathcal{M}^2$ 的**互特征**.

注 3.2. $\langle M, N\rangle = \frac{1}{2}\big(\langle M+N\rangle - \langle M\rangle - \langle N\rangle\big)$.

命题 3.3. $(M_tN_t - \langle M, N\rangle_t)_{t\geq 0}$ 是鞅, $\forall M, N \in \mathcal{M}^2$.

命题 3.4. $(M, N) \mapsto \langle M, N\rangle$ 是 $\mathcal{M}^2$ 上的正定对称双线性映射.

定义 3.5 (生成元). 半群 $(P_t)_{t\geq 0}$ 的**生成元**为 $\mathsf{A} := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big|_{t=0+}\mathsf{P}_t$, 其中 $\mathsf{P}_t f(x) := \int P_t(x, \mathrm{d}y) f(y)$, $f \in C_b$.

命题 3.6. $\mathsf{A}\mathsf{P}_t = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathsf{P}_t = \mathsf{P}_t\mathsf{A}$, $\forall t \geq 0$.

例 3.7. 转移速率矩阵为 Q 的时齐连续时间 *Markov* 链的生成元为 $\mathsf{A}f(x) = \sum_y Q(x,y)f(y)$, $f \in C_b$.

定理 3.8. 设 $(X_t)_{t\geq 0}$ 是生成元为 A 的时齐 *Markov* 过程, 则 $\big(f(X_t) - \int_0^t \mathsf{A}f(X_s)\,\mathrm{d}s\big)_{t\geq 0}$ 是鞅, $\forall f \in C_b$.

证明. 记 Markov 转移半群为 $(P_t)_{t\geq 0}$, 则 $\mathbb{E}[f(X_{t+u})|\mathscr{F}_t] = \mathsf{P}_u f(X_t)$, $\forall t, u \geq 0$. 利用 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\mathsf{P}_u = \mathsf{P}_u\mathsf{A}$, 可得 $\mathsf{P}_u f(X_t) - f(X_t) = \int_0^u \mathsf{P}_v\mathsf{A}f(X_t)\,\mathrm{d}v = \int_0^u \mathbb{E}[\mathsf{A}f(X_{t+v})|\mathscr{F}_t]\,\mathrm{d}v = \mathbb{E}[\int_0^u \mathsf{A}f(X_{t+v})\,\mathrm{d}v|\mathscr{F}_t]$. □

定义 3.9 (随机测度). 可测空间 (S, Σ) 上的**随机测度**指的是满足可数可加性的映射 $\Lambda : B \in \Sigma \mapsto \Lambda(B) \in \{$取值于 $[0,\infty]$ 的随机变量$\}$.

例 3.10. 存在 $(\mathbb{R}^d, \mathscr{B}_{\mathbb{R}}^d)$ 上的随机测度 Λ, 称为强度 λ 的 *Poisson* 点过程, 适合 $\Lambda(B) \sim \mathrm{Poisson}(\lambda|B|)$, 并且只要 $B_1, \ldots, B_k$ 两两不交就有 $\Lambda(B_1), \ldots, \Lambda(B_k)$ 独立.

定义 3.11 (计数过程). 对应于 $[0,\infty)$ 上的非负整数值随机测度 Λ 的**计数过程**为 $N_t := \Lambda([0,t])$, $t \geq 0$.

例 3.12. 非负随机变量 $X_1, X_2, \ldots$ 决定更新过程 $N_t := \sup\{n : \sum_{i=1}^n X_i \leq t\}$, $t \geq 0$.

定义 3.13 (简单计数过程). 关于滤流 $(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$ 适应的计数过程 $N = (N_t)_{t\geq 0}$ 称为**简单的**, 若存在循序可测随机过程 $\lambda = (\lambda_s)_{s\geq 0}$ 和一列有限停时 $\tau_n \to \infty$, 使得 $\mathbb{E}[N_{u\wedge\tau_n} - N_{t\wedge\tau_n}|\mathscr{F}_t] = \mathbb{E}[\int_{t\wedge\tau_n}^{u\wedge\tau_n} \lambda_s\,\mathrm{d}s|\mathscr{F}_t]$, $\forall u \geq t \geq 0$, $\forall n$, 其中 λ 称为**随机速率**. 换言之, $\big(N_t - \int_0^t \lambda_s\,\mathrm{d}s\big)_{t\geq 0}$ 是 $(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$-局部鞅.

习题 3.1 ([1] 1.5.7). 设 $M, N \in \mathcal{M}^2$. 证明:

1. $\langle M, N\rangle_t^2 \leq \langle M\rangle_t\langle N\rangle_t$, $\forall t \geq 0$.

   证明. 只需考察 $\alpha \in \mathbb{R} \mapsto \langle M\rangle_t\alpha^2 + 2\langle M, N\rangle_t\alpha + \langle N\rangle_t = \langle \alpha M + N\rangle_t \geq 0$ 的判别式. ■

2. 设 V_t 是 $[0,t] \ni u \mapsto \langle M, N\rangle_u$ 的全变差, $t > s$, 则 $V_t - V_s \leq \frac{1}{2}\big(\langle M\rangle_t - \langle M\rangle_s + \langle N\rangle_t - \langle N\rangle_s\big)$.

   证明. 由于 $A := \frac{1}{2}(\langle M\rangle + \langle N\rangle)$ 是增过程, 只需 $|\langle M, N\rangle_t - \langle M, N\rangle_s| \leq A_t - A_s$, $\forall t > s$. 不妨置 $s = 0$, 此时易得 $\pm\langle M, N\rangle_t \leq A_t \iff \langle M \mp N\rangle_t \geq 0$. ■

习题 3.2. 设 $X = (X_t)_{t\geq 0}$ 是一个单生过程, 即其状态空间为 $\mathbb{Z}_+ := \{0, 1, 2, \cdots\}$, 转移速率矩阵 Q 形如 $Q(x, y) := \lambda(x)\mathbb{1}_{[y=x+1]} - \lambda(x)\mathbb{1}_{[y=x]}$. 进一步假定 $\sum_{x=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda(x)} = \infty$, 即 X 非爆炸. 求 X 的 *Doob–Meyer* 分解并验证.

解. 作为习题3.3的特例, $\big(X_t - \int_0^t \lambda(X_s)\,\mathrm{d}s\big)_{t\geq 0}$ 是鞅. ////

习题 3.3. 设 $X = (X_t)_{t\geq 0}$ 是一个取值于 $\mathbb{Z}_+ := \{0, 1, 2, \cdots\}$ 的连续时间 *Markov* 链, 转移速率矩阵 Q 使得 X 非爆炸. 任取 $f : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R}$ 适合 $\mathbb{E}|f(X_t)| < \infty$, $\forall t \geq 0$. 求 $f(X) = (f(X_t))_{t\geq 0}$ 的 *Doob–Meyer* 分解并验证.

解. 断言 $M := \big(f(X_t) - \int_0^t \sum_y Q(X_s, y)f(y)\,\mathrm{d}s\big)_{t\geq 0}$ 是鞅. 任取 $u > t$, 有

$$\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\mathbb{E}[f(X_u)|\mathscr{F}_t] = \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}h}\big|_{h=0+}\mathbb{E}\big[\mathbb{E}[f(X_{u+h})|\mathscr{F}_u]\big|\mathscr{F}_t\big] = \mathbb{E}\big[\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}h}\big|_{h=0+}\mathbb{E}[f(X_{u+h})|\mathscr{F}_u]\big|\mathscr{F}_t\big],$$

其中 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}h}\big|_{h=0+}\mathbb{E}[f(X_{u+h})|\mathscr{F}_u] = \sum_y Q(X_u, y)f(y)$. 即得 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\mathbb{E}[M_u|\mathscr{F}_t] = 0$, 进而 $\mathbb{E}[M_u|\mathscr{F}_t] = M_t$. ////

习题 3.4. 设 $X_1, X_2, \ldots$ 是 *i.i.d.* 随机变量, $\mathbb{P}\{X_1 > 0\} = 1$. 令 $T_n := \sum_{i=1}^n X_i$ 和 $N_t := \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{T_n\leq t\}}$. 求 $N = (N_t)_{t\geq 0}$ 的 *Doob–Meyer* 分解并验证. 特别地, 考虑 $X_1 = 1$ a.s. 的情况.

解. 令 $\mathscr{G}_t := \mathscr{F}_t^N \vee \sigma(T_n \wedge t : n \geq 0)$, 则 N 适应于 $(\mathscr{G}_t)_{t\geq 0}$. 记 $F := \mathbb{P}\{X_1 \leq \boldsymbol{\cdot}\}$ 的 n 次卷积为 F^{*n}. 任取 $t > s$, 有 $\mathbb{P}(T_n \leq t\,|\,\mathscr{G}_s) = \mathbb{1}_{\{n\leq N_s\}} + \mathbb{1}_{\{n>N_s\}}G_n(t; s)/[1 - F(s - T_{N_s})]$, 其中

$$G_n(t; s) := F^{*(n-N_s)}(t - T_{N_s}) - \int_{x=0}^{s-T_{N_s}} F^{*(n-N_s-1)}(t - T_{N_s} - x)\,\mathrm{d}F(x),$$

从而 $\mathbb{E}[N_t|\mathscr{G}_s] - N_s = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{n>N_s\}}G_n(t; s)/[1 - F(s - T_{N_s})]$. 因此, N 的补偿子为 $A = (A_t)_{t\geq 0}$, 其中

$$A_t = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{s=0}^{t} \frac{\mathbb{1}_{\{N_s<n\}}}{1 - F(s - T_{N_s})}\,\mathrm{d}G_n(\boldsymbol{\cdot}\,; s)|_s.$$

如果 (a.s.) $X_1 = 1$, 那么 $N_t = \lfloor t\rfloor$, 此时 $A_t = \lfloor t\rfloor$. ////

4 随机积分 (2021 年 9 月 29 日)

固定 $M = (M_t)_{t\geq 0} \in \mathcal{M}^2_{\text{cts}}$, 定义测度

$$\mu_M(A) := \int_\Omega \int_{t=0}^{\infty} \mathbb{1}_A(t, \omega)\,\mathrm{d}\langle M\rangle_t(\omega)\,\mathrm{d}\mathbb{P}(\omega), \quad A \in \mathscr{B}_{[0,\infty)} \otimes \mathscr{F}.$$

定义 4.1. 两个可测且适应的过程 X 和 Y 当作等价的, 若 $\mu_M\{(t, \omega) : X_t(\omega) \neq Y_t(\omega)\} = 0$.

注 4.2. 在 μ_M 下等价和互为修正是没有蕴涵关系的, 因为 μ_M 涉及的重积分有顺序.

定义 4.3. $\mathcal{L}^*(M) := \bigcap_{T\in(0,\infty)} \mathcal{L}^*_T(M)$, $\mathcal{L}^*_T(M) := \{$循序可测 $(X_t)_{t\geq 0} : \mathbb{E}\int_{t=0}^T X_t^2\,\mathrm{d}\langle M\rangle_t < \infty\}/ \overset{\mu_M\text{-a.e.}}{=\!=\!=}$.

命题 4.4. 范数 $\|X\|_{\mathcal{L}^*_T(M)} := \sqrt{\mathbb{E}\int_{t=0}^T X_t^2\,\mathrm{d}\langle M\rangle_t}$ 使 $\mathcal{L}^*_T(M)/$轨道$|_{(T,\infty)}$ 成为 *Hilbert* 空间.

推论 4.5. 准范数 $\|X\|_{\mathcal{L}^*(M)} := \sum_{T=1}^{\infty}(1 \wedge \|X\|_{\mathcal{L}^*_T(M)})/2^T$ 使 $\mathcal{L}^*(M)$ 成为完备度量空间.

定义 4.6 (简单过程)**.** 随机过程 $X = (X_t)_{t\geq 0}$ 称为**简单的**, 若存在 $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots$ 和一致有界的 $\xi_k \in L^\infty(\mathscr{F}_{t_k}, \mathbb{P})$, 使

$$X_t = \xi_0\mathbb{1}_{\{0\}}(t) + \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k\mathbb{1}_{(t_k,t_{k+1}]}(t), \ \forall t. \tag{$\spadesuit$}$$

所有简单过程的集合记作 $\mathcal{L}_0$.

引理 4.7. 设 $(A_t)_{t\geq 0}$ 是适应的连续增过程. 若 $(X_t)_{t\geq 0}$ 循序可测且 $\mathbb{E}\int_{t=0}^T X_t^2 \,\mathrm{d}A_t < \infty$, $\forall T\in[0,\infty)$, 则存在 $X^{(n)}\in\mathcal{L}_0$ 使得

$$\mathbb{E}\int_{t=0}^T |X_t^{(n)} - X_t|^2 \,\mathrm{d}A_t \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,\ \forall T\in[0,\infty).$$

定理 4.8. $\mathcal{L}_0$ 是 $\mathcal{L}^*(M)$ 的稠密子空间.

定义 4.9 (简单过程的随机积分)**.** (♠) $\in\mathcal{L}_0$ 关于 M 的**随机积分**为鞅变换

$$\int_0^t X\,\mathrm{d}M := I_t^M(X) := \sum_{k=0}^\infty \xi_k(M_{t_{k+1}\wedge t} - M_{t_k\wedge t}),\ t\in[0,\infty).$$

命题 4.10. $I^M: X\in\mathcal{L}_0 \mapsto I^M(X) := (I_t^M(X))_{t\geq 0}\in\mathcal{M}^2_{\text{cts}}$ 是良定义的 $\mathbb{R}$-线性映射.

命题 4.11 (Itô 等距)**.** 对 $X\in\mathcal{L}_0$, 可得 $\big((\int_0^t X\,\mathrm{d}M)^2 - \int_{s=0}^t X_s^2\,\mathrm{d}\langle M\rangle_s\big)_{t\geq 0}$ 是鞅. 特别地,

$$\|\textstyle\int X\,\mathrm{d}M\|^2_{\mathcal{M}^2_T} = \mathbb{E}\big[(\int_0^T X\,\mathrm{d}M)^2\big] = \mathbb{E}\int_{t=0}^T X_t^2\,\mathrm{d}\langle M\rangle_t = \|X\|^2_{\mathcal{L}^*_T(M)},\ \forall T\in[0,\infty).$$

定义 4.12 (随机积分)**.** $X\in\mathcal{L}^*(M)$ 关于 M 的**随机积分**为

$$\textstyle\int X\,\mathrm{d}M := I^M(X) := \mathcal{M}^2\text{-}\lim I^M(X^{(n)}),\ \text{其中}\ \mathcal{L}_0\ni X^{(n)} \xrightarrow{\mathcal{L}^*(M)} X\ (n\to\infty).$$

定理 4.13. $I^M: X\in\mathcal{L}^*(M)\mapsto \int X\,\mathrm{d}M\in\mathcal{M}^2_{\text{cts}}$ 是线性等距, 且 $\langle\int X\,\mathrm{d}M\rangle = \big(\int_{s=0}^t X_s^2\,\mathrm{d}\langle M\rangle_s\big)_{t\geq 0}$.

命题 4.14. 若 $X,Y\in\mathcal{L}^*(M)$ 是 μ_M-等价的, 则 $\int X\,\mathrm{d}M$ 和 $\int Y\,\mathrm{d}M$ 不可区分.

证明. 对任意 $T>0$ 有 $\mathbb{E}\big[(\int_0^T X\,\mathrm{d}M - \int_0^T Y\,\mathrm{d}M)^2\big] = \|\int(X-Y)\,\mathrm{d}M\|^2_{\mathcal{M}^2_T} = \|X-Y\|^2_{\mathcal{L}^*_T(M)} = 0$ 以及 $\mathbb{E}\big[\max_{t\in[0,T]}(\int_0^t X\,\mathrm{d}M - \int_0^t Y\,\mathrm{d}M)^2\big] \leq 4\,\mathbb{E}\big[(\int_0^T X\,\mathrm{d}M - \int_0^T Y\,\mathrm{d}M)^2\big]$. □

习题 4.1. 设 $M=(M_t)_{t\geq 0}\in\mathcal{M}^2_{\text{cts}}$. 证明:

1. 若 $0\leq t_0\leq t_1<t_2$, 且 $\xi_1\in L^\infty(\mathscr{F}_{t_1})$, 则 $\mathbb{E}[\xi_1^2(M_{t_2}-M_{t_1})^2|\mathscr{F}_{t_0}] = \mathbb{E}[\xi_1^2(\langle M\rangle_{t_2} - \langle M\rangle_{t_1})|\mathscr{F}_{t_0}]$.

   证明. 利用 $\mathbb{E}[(M_{t_2}-M_{t_1})^2|\mathscr{F}_{t_1}] = \mathbb{E}[M_{t_2}^2|\mathscr{F}_{t_1}] - M_{t_1}^2 = \mathbb{E}[\langle M\rangle_{t_2}|\mathscr{F}_{t_1}] - \langle M\rangle_{t_1}$. ■

2. 对于 $X\in\mathcal{L}^*(M)$, 有 $\mathbb{E}[(I_t^M(X) - I_s^M(X))^2|\mathscr{F}_s] = \mathbb{E}[\int_{u=s}^t X_u^2\,\mathrm{d}\langle M\rangle_u|\mathscr{F}_s]$ (a.s.), $\forall t>s$.

   证明. 因为 $\mathcal{L}_0$ 在 $\mathcal{L}^*(M)$ 中稠密, 只需证明 $X\in\mathcal{L}_0$ 的情况, 而这由前立得. ■

习题 4.2 ([1] 1.5.12)**.** 设 $X\in\mathcal{M}^2_{\text{cts}}$ 满足 $\langle X\rangle_\tau = 0$ a.s., 其中 τ 是停时, 证明 $\mathbb{P}\{X_{t\wedge\tau}=0,\ \forall t\} = 1$.

证明. 任取 $T>0$, 有 $\mathbb{E}[\max_{t\in[0,T]} X_{t\wedge\tau}^2] \leq 4\,\mathbb{E}[X_{T\wedge\tau}^2]$, 而 $\mathbb{E}[X_{T\wedge\tau}^2] = \mathbb{E}\langle X\rangle_{T\wedge\tau} \leq \mathbb{E}\langle X\rangle_\tau = 0$. ■

5 随机积分 · 互特征 (2021 年 10 月 11 日)

设 $M,N\in\mathcal{M}^2_{\text{cts}}$, $X\in\mathcal{L}^*(M)$, $Y\in\mathcal{L}^*(N)$, $t\geq 0$.

定理 5.1 (Kunita–Watanabe)**.** $\int_{s=0}^t |X_s|\,|Y_s|\,|\mathrm{d}\langle M,N\rangle_s| \leq \sqrt{\int_{s=0}^t X_s^2\,\mathrm{d}\langle M\rangle_s}\sqrt{\int_{s=0}^t Y_s^2\,\mathrm{d}\langle N\rangle_s}$.

证明. 对 $\int_0^t \mathrm{d}\mu$ 应用 Cauchy–Schwarz 不等式, 其中 $\mathrm{d}\mu(s) = |\mathrm{d}\langle M,N\rangle_s| + \mathrm{d}\langle M\rangle_s + \mathrm{d}\langle N\rangle_s$. □

引理 5.2. $\langle\int X\,\mathrm{d}M,\ N\rangle = \big(\int_{s=0}^t X_s\,\mathrm{d}\langle M,N\rangle_s\big)_{t\geq 0}$, 亦即 $\mathrm{d}\langle\int X\,\mathrm{d}M,\ N\rangle_t = X_t\,\mathrm{d}\langle M,N\rangle_t$.

命题 5.3. $\langle\int X\,\mathrm{d}M,\ \int Y\,\mathrm{d}N\rangle = \big(\int_{s=0}^t X_sY_s\,\mathrm{d}\langle M,N\rangle_s\big)_{t\geq 0}$, 亦即 $\mathrm{d}\langle\int X\,\mathrm{d}M,\ \int Y\,\mathrm{d}N\rangle_t = X_tY_t\,\mathrm{d}\langle M,N\rangle_t$.

引理 5.4. $\int X\,\mathrm{d}M$ 是方程 $\langle ?, N\rangle = \left(\int_{s=0}^t X_s\,\mathrm{d}\langle M,N\rangle_s\right)_{t\geq 0}$ $(\forall N)$ 在 $\mathcal{M}^2_{\mathrm{cts}}$ 中的唯一解. (Riesz 表示)

命题 5.5. 任取停时 τ, 停止过程满足 $(\int X\,\mathrm{d}M)^\tau = \left(\int_{s=0}^t X_s \mathbb{1}_{\{s\leq\tau\}}\,\mathrm{d}M_s\right)_{t\geq 0} \overset{5.7}{=\!=} \int X^\tau\,\mathrm{d}(M^\tau)$.

注 5.6. 第一个等号需要 $\langle (\int X\,\mathrm{d}M)^\tau, N\rangle = \langle \int X\,\mathrm{d}M, N\rangle^\tau$. 一般地, $\langle M^\tau, N\rangle = \langle M,N\rangle^\tau$.

命题 5.7. 若 $N = \int X\,\mathrm{d}M$, 则 $YX = (Y_tX_t)_{t\geq 0} \in \mathcal{L}^*(M)$ 且 $\int Y\,\mathrm{d}N = \int YX\,\mathrm{d}M$.
换言之, 若 $\mathrm{d}N_t = X_t\,\mathrm{d}M_t$, 则 $Y_t\,\mathrm{d}N_t = Y_tX_t\,\mathrm{d}M_t$.

推论 5.8. $\int \xi_0 X\,\mathrm{d}M = \xi_0 \int X\,\mathrm{d}M$, $\forall \xi_0 \in L^\infty(\mathscr{F}_0)$.

习题 5.1. 设 $X, Y \in \mathcal{L}_0$, $M, N \in \mathcal{M}^2_{\mathrm{cts}}$. 证明 $\langle \int X\,\mathrm{d}M, \int Y\,\mathrm{d}N\rangle_t = \int_{s=0}^t X_sY_s\,\mathrm{d}\langle M,N\rangle_s$.

证明. 不妨 $X_\bullet = \xi_0\mathbb{1}_{\{0\}} + \sum_{k=0}^\infty \xi_k \mathbb{1}_{(t_k,t_{k+1}]}$ 且 $Y_\bullet = \eta_0\mathbb{1}_{\{0\}} + \sum_{k=0}^\infty \eta_k\mathbb{1}_{(t_k,t_{k+1}]}$, 其中 $0 = t_0 < t_1 < \dots$, 则有 $\int X\,\mathrm{d}M = \sum_{k=0}^\infty \xi_k(M^{t_{k+1}} - M^{t_k})$ 和 $\int Y\,\mathrm{d}N = \sum_{k=0}^\infty \eta_k(N^{t_{k+1}} - N^{t_k})$. 易得

$$\langle \xi_j(M^{t_{j+1}} - M^{t_j}), \eta_k(N^{t_{k+1}} - N^{t_k})\rangle = \xi_k\eta_k(\langle M,N\rangle^{t_{k+1}} - \langle M,N\rangle^{t_k})\mathbb{1}_{[j=k]},\ \forall j,k,$$

从而 $\langle \int X\,\mathrm{d}M, \int Y\,\mathrm{d}N\rangle_t = \sum_{k=0}^\infty \xi_k\eta_k \int_{s=0}^t \mathbb{1}_{(t_k,t_{k+1}]}(s)\,\mathrm{d}\langle M,N\rangle_s = \int_{s=0}^t X_sY_s\,\mathrm{d}\langle M,N\rangle_s$. ■

6 随机积分 · 局部化 (2021 年 10 月 13 日)

定义 6.1 (局部可积). 适应的随机过程 $X = (X_t)_{t\geq 0}$ 称为**局部可积的**, 若存在一列停时 $\tau_n \nearrow \infty$ (a.s.), 使得 $X^{\tau_n} = (X_{t\wedge\tau_n})_{t\geq 0}$ 可积. 停时列 $\{\tau_n\}_{n=1}^\infty$ 称为**局部化序列**, 不妨满足 $\tau_n \leq n$.

定义 6.2 (局部鞅). 称右连左极 (连续) 的随机过程 $M = (M_t)_{t\geq 0}$ 为 **(连续) 局部 (平方可积) 鞅**, 若存在局部化序列 $\{\tau_n\}_{n=1}^\infty$ 使得 $M^{\tau_n} = (M_{t\wedge\tau_n})_{t\geq 0}$ 是 (平方可积) 鞅. 记

- $\mathcal{M}_{\mathrm{loc}} := \{$零初值局部鞅$\}$, $\mathcal{M}^2_{\mathrm{loc}} := \{$零初值局部平方可积鞅$\}$,
- $\mathcal{M}_{\mathrm{cts,loc}} := \{$零初值连续局部鞅$\} = \{$零初值连续局部平方可积鞅$\} \subset \mathcal{M}^2_{\mathrm{loc}}$.

定理 6.3. 对于 $M = (M_t)_{t\geq 0} \in \mathcal{M}^2_{\mathrm{loc}}$, 存在唯一的可料局部可积零初值右连续增过程 $\langle M\rangle = (\langle M\rangle_t)_{t\geq 0}$, 称为 M 的**特征**, 使得 $(M_t^2 - \langle M\rangle_t)_{t\geq 0}$ 是局部鞅.

证明. 利用局部化, 可得 $\langle M\rangle_t = \sum_{n=1}^\infty \langle M^{\tau_n}\rangle_t \mathbb{1}_{(\tau_{n-1},\tau_n]}(t)$, 其中 $\tau_0 := 0$. □

推论 6.4. 对于 $M, N \in \mathcal{M}^2_{\mathrm{loc}}$ 可以定义**互特征** $\langle M,N\rangle$, 并且 $\langle M,N\rangle^{\tau_n} = \langle M^{\tau_n}, N^{\tau_n}\rangle$.
特别地, $(M_tN_t - \langle M,N\rangle_t)_{t\geq 0}$ 是局部鞅.

定义 6.5. 设 $M \in \mathcal{M}_{\mathrm{cts,loc}}$, 令 $\mathcal{L}^*_{\mathrm{loc}}(M) := \bigcap_{T\in(0,\infty)}\{$循序可测 $(X_t)_{t\geq 0} : \int_{t=0}^T X_t^2\,\mathrm{d}\langle M\rangle_t < \infty$ a.s.$\}$.

定义 6.6 (关于局部鞅的随机积分). 对于 $M \in \mathcal{M}_{\mathrm{cts,loc}}$ 和 $X = (X_t)_{t\geq 0} \in \mathcal{L}^*_{\mathrm{loc}}(M)$, 可取局部化序列 $\tau_n \leq n \wedge \inf\{t : |M_t| > n\} \wedge \inf\{t : \int_{s=0}^t X_s^2\,\mathrm{d}\langle M\rangle_s > n\}$, 则 X 关于 M 的**随机积分**为

$$\int_0^t X\,\mathrm{d}M := \int_0^t X^{\tau_n}\,\mathrm{d}(M^{\tau_n}),\ 0 \leq t \leq \tau_n.$$

注 6.7. $I^M : X \in \mathcal{L}^*_{\mathrm{loc}}(M) \mapsto I^M(X) := \int X\,\mathrm{d}M := (\int_0^t X\,\mathrm{d}M)_{t\geq 0} \in \mathcal{M}_{\mathrm{cts,loc}}$ 是良定义的 $\mathbb{R}$-线性映射.

☞ 固定 $M \in \mathcal{M}_{\mathrm{cts,loc}}$ 和 $X \in \mathcal{L}^*_{\mathrm{loc}}(M)$.

命题 6.8. $\langle \int X\,\mathrm{d}M\rangle = \left(\int_{s=0}^t X_s^2\,\mathrm{d}\langle M\rangle_s\right)_{t\geq 0}$.

引理 6.9. $\langle \int X\,\mathrm{d}M,\, N\rangle = \big(\int_{s=0}^t X_s\,\mathrm{d}\langle M,N\rangle_s\big)_{t\geq 0}$, $\forall N\in\mathcal{M}_{\mathrm{cts,loc}}$.

命题 6.10. $\langle \int X\,\mathrm{d}M,\, \int Y\,\mathrm{d}N\rangle = \big(\int_{s=0}^t X_sY_s\,\mathrm{d}\langle M,N\rangle_s\big)_{t\geq 0}$, $\forall Y\in\mathcal{L}^*_{\mathrm{loc}}(N)$, $\forall N\in\mathcal{M}_{\mathrm{cts,loc}}$.

引理 6.11. $\int X\,\mathrm{d}M$ 是方程 $\langle ?, N\rangle = \big(\int_{s=0}^t X_s\,\mathrm{d}\langle M,N\rangle_s\big)_{t\geq 0}$ $(\forall N\in\mathcal{M}^2_{\mathrm{cts}})$ 在 $\mathcal{M}_{\mathrm{cts,loc}}$ 中的唯一解.

命题 6.12. 设 $N=\int X\,\mathrm{d}M$ 且 $Y\in\mathcal{L}^*_{\mathrm{loc}}(N)$, 则 $YX=(Y_tX_t)_{t\geq 0}\in\mathcal{L}^*_{\mathrm{loc}}(M)$ 且 $\int Y\,\mathrm{d}N=\int YX\,\mathrm{d}M$.

命题 6.13. $(\int X\,\mathrm{d}M)^\tau = \big(\int_{s=0}^t X_s\mathbb{1}_{\{s\leq\tau\}}\,\mathrm{d}M_s\big)_{t\geq 0} = \int X^\tau\,\mathrm{d}(M^\tau)$, 其中 τ 是任意停时.

命题 6.14. 设 τ 是停时, $X^{(n)}\in\mathcal{L}^*_{\mathrm{loc}}(M)$, 则

$$\int_{t=0}^\tau |X_t^{(n)}-X_t|^2\,\mathrm{d}\langle M\rangle_t \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} 0 \implies \sup_{0\leq t\leq\tau}\Big|\int_0^t X^{(n)}\,\mathrm{d}M-\int_0^t X\,\mathrm{d}M\Big| \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} 0.$$

习题 6.1 ([1] 1.5.16)**.** 举例说明连续局部鞅不一定是鞅.

解. 考虑适应于 $\mathscr{F}_t:=\sigma(B_s: 0\leq s\leq \frac{t}{(1-t)^+})$ 的 $M_t := B^\tau_{t/(1-t)}\mathbb{1}_{[0,1)}(t)-\mathbb{1}_{[1,\infty)}(t)$, 其中 B 是零初值标准 Brown 运动, $\tau=\inf\{t: B_t=-1\}$. 由于 $M_0=0\neq -1=M_1$, 可见 $M=(M_t)_{t\geq 0}$ 不是鞅. 令 $\tau_n := \frac{n}{n+1}\mathbb{1}_{\{\tau>n\}}+(\frac{\tau}{\tau+1}+n)\mathbb{1}_{\{\tau\leq n\}}$, 则 $\tau_n\nearrow\infty$ (a.s.), 且

$$\begin{aligned} M_t^{\tau_n} &= B^\tau_{t/(1-t)}\mathbb{1}_{\{\tau\leq n\}}\mathbb{1}_{[0,1)}(t)+B^{\tau\wedge n}_{t/(1-t)^+}\mathbb{1}_{\{\tau>n\}}-\mathbb{1}_{\{\tau\leq n\}}\mathbb{1}_{[1,\infty)}(t)\\ &= B^{\tau\wedge n}_{t/(1-t)}\mathbb{1}_{[0,1)}(t)+B_{\tau\wedge n}\mathbb{1}_{[1,\infty)}(t) \qquad = \mathbb{E}[B_{\tau\wedge n}|\mathscr{F}_t]. \end{aligned}$$

////

习题 6.2 ([1] 3.2.25)**.** 对于 $M,N\in\mathcal{M}_{\mathrm{cts,loc}}$ 和 $X\in\mathcal{L}^*_{\mathrm{loc}}(M)\cap\mathcal{L}^*_{\mathrm{loc}}(N)$, 证明 $\int X\,\mathrm{d}(cM+N) = c\int X\,\mathrm{d}M+\int X\,\mathrm{d}N$, 其中 c 是常数.

证明. 任取 $Z\in\mathcal{M}_{\mathrm{cts,loc}}$ 和 $t\geq 0$, 有

$$\begin{aligned} \langle \textstyle\int X\,\mathrm{d}(cM+N),\, Z\rangle_t &= \textstyle\int_{s=0}^t X_s\,\mathrm{d}\langle cM+N, Z\rangle_s\\ &= c\textstyle\int_{s=0}^t X_s\,\mathrm{d}\langle M,Z\rangle_s+\int_{s=0}^t X_s\,\mathrm{d}\langle N,Z\rangle_s\\ &= c\,\langle \textstyle\int X\,\mathrm{d}M,\, Z\rangle_t+\langle\int X\,\mathrm{d}N,\, Z\rangle_t = \langle c\int X\,\mathrm{d}M+\int X\,\mathrm{d}N,\, Z\rangle_t. \end{aligned}$$

■

习题 6.3 ([3] IV.1.27)**.** *1. 设 M 和 N 是独立的连续局部鞅, 证明 $\langle M,N\rangle=0$.*

证明. 利用局部化, 不妨设 M 和 N 一致有界. 任取 $t\geq 0$, 令 $\{t_k\}$ 是 $[0,t]$ 的分划, 适合 $\max_k(t_k-t_{k-1})\to 0$. 一方面, $\langle M,N\rangle_t=\mathbb{P}\text{-}\lim\sum_k(M_{t_k}-M_{t_{k-1}})(N_{t_k}-N_{t_{k-1}})$. 另一方面,

$$\begin{aligned} &\|\textstyle\sum_k(M_{t_k}-M_{t_{k-1}})(N_{t_k}-N_{t_{k-1}})\|^2_{L^2(\mathbb{P})}\\ &=\mathbb{E}\textstyle\sum_{j,k}(M_{t_j}-M_{t_{j-1}})(M_{t_k}-M_{t_{k-1}})(N_{t_j}-N_{t_{j-1}})(N_{t_k}-N_{t_{k-1}})\\ &=\textstyle\sum_k\mathbb{E}[(M_{t_k}-M_{t_{k-1}})^2]\,\mathbb{E}[(N_{t_k}-N_{t_{k-1}})^2]\\ &=\textstyle\sum_k(\mathbb{E}M^2_{t_k}-\mathbb{E}M^2_{t_{k-1}})(\mathbb{E}N^2_{t_k}-\mathbb{E}N^2_{t_{k-1}}) \quad\leq \max_k(\mathbb{E}M^2_{t_k}-\mathbb{E}M^2_{t_{k-1}})(\mathbb{E}N^2_t-\mathbb{E}N^2_0)\to 0, \end{aligned}$$

因为 $s\mapsto\mathbb{E}M_s^2$ 连续. 综上, $\langle M,N\rangle_t=0$, $\forall t$. ■

2. 设 B 是标准 Brown 运动, τ 是停时且不是常数, 证明 B^τ 和 $B-B^\tau$ 是不独立的连续鞅, 而 $\langle B^\tau, B-B^\tau\rangle=0$.

证明. 任取 $t\geq 0$, 有 $\langle B^\tau\rangle_t=t\wedge\tau$ 和 $\langle B-B^\tau\rangle_t=(t-\tau)^+$, 从而 $\{\tau<t\}\in\sigma(B^\tau)\cap\sigma(B-B^\tau)$. 由于 τ 不是常数, 可得 B^τ 和 $B-B^\tau$ 不独立. ■

注. 参看 A.S. Cherny. (2006). Some Particular Problems of Martingale Theory. In: Yu.M. Kabanov; R.S. Liptser; J. Stoyanov. (Eds.). *From Stochastic Calculus to Mathematical Finance*, pp. 109–124. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-540-30788-4_6

7 Itô 公式 (2021 年 10 月 20 日)

定义 7.1 (半鞅)**.** 称 (连续) 适应随机过程 (X_t) 为 **(连续) 半鞅**, 若存在分解 $X_t = X_0 + M_t + A_t, \forall t$, 其中 $(M_t) \in \mathcal{M}_{\text{loc}}$, 并且 (A_t) 是有限变差的右连左极 (连续) 随机过程. (Bichteler–Dellacherie)

注 7.2. 有限变差过程 A 是两个增过程 $A^{\pm}$ 之差, 即 Jordan 分解 $\mathrm{d}A_t = \mathrm{d}A_t^+ - \mathrm{d}A_t^-$, $t \in [0, \infty)$.

命题 7.3 (Fisk)**.** *有限变差零初值连续局部鞅几乎必然为零. 特别地, 连续半鞅的分解是唯一的.*

证明. 局部化之后, 应用 Doob–Meyer 分解的唯一性, 或者直接对二次变差进行放缩. □

定义 7.4. 设 X 是半鞅, 典则分解为 $X = X_0 + M + A$, 即 $X_t = X_0 + M_t + A_t, \forall t$.

约定 $\langle X \rangle := \langle M \rangle$ 和 $\int \bullet \,\mathrm{d}X := \int \bullet \,\mathrm{d}M + \int_{s=0}^{\cdot} \bullet \,\mathrm{d}A_s$, 分别称为 X 的**特征**和**关于 X 的积分**.

定义 7.5. 两个连续半鞅 X 和 Y 的**互特征**为 $\langle X, Y \rangle := \frac{1}{4}\big(\langle X+Y \rangle - \langle X-Y \rangle\big)$.

定理 7.6 (Itô)**.** *设 $f \in C^{1,2}([0,\infty) \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R})$. 对于连续半鞅 X^i, $i = 1, 2, \cdots, n$, 有*

$$f(t, X_t^1, \cdots, X_t^n) = f(0, X_0^1, \cdots, X_0^n) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s, X_s^1, \cdots, X_s^n)\,\mathrm{d}s + \sum_{i=1}^n \int_{s=0}^t \frac{\partial f}{\partial x^i}(s, X_s^1, \cdots, X_s^n)\,\mathrm{d}X_s^i$$
$$+ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_{s=0}^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(s, X_s^1, \cdots, X_s^n)\,\mathrm{d}\langle X^i, X^j \rangle_s,$$

简记为 $\mathrm{d}f(t, X_t) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, X_t)\,\mathrm{d}t + \frac{\partial f}{\partial x}(t, X_t)\,\mathrm{d}X_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, X_t)\,\mathrm{d}\langle X, X \rangle_t$.

证明. 分划积分区间, 逐段作二阶 Taylor 展开, 对每个求和式推导依概率收敛. □

例 7.7. *设 B 是标准 Brown 运动, $X \in \mathcal{L}^*_{\text{loc}}(B)$. 令 $\zeta_t := \int_0^t X\,\mathrm{d}B - \frac{1}{2}\int_0^t X_s^2\,\mathrm{d}s$, 则 $Z_t := \mathrm{e}^{\zeta_t}$ 满足 $\mathrm{d}Z_t = Z_t X_t\,\mathrm{d}B_t$, 即 $Z_t = 1 + \int_{s=0}^t Z_s X_s\,\mathrm{d}B_s$.*

命题 7.8. *设 $f \in C^{1,2}([0,\infty) \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R})$. 对于连续半鞅 Y 和 X^i, $i = 1, 2, \cdots, n$, 令 $Z_t := f(t, X_t^1, \cdots, X_t^n)$, 则有 $\langle Z, Y \rangle_t = \sum_{i=1}^n \int_{s=0}^t \frac{\partial f}{\partial x^i}(s, X_s^1, \cdots, X_s^n)\,\mathrm{d}\langle X^i, Y \rangle_s$.*

定义 7.9 (Stratonovich 积分)**.** 连续半鞅 Y 关于连续半鞅 X 的 **Fisk–Stratonovich 积分**为

$$\int Y \circ \mathrm{d}X := \int Y\,\mathrm{d}X + \tfrac{1}{2}\langle Y, X \rangle.$$

命题 7.10. *设 X 和 Y 是连续半鞅, $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = T$, 则*

$$\int_0^T Y \circ \mathrm{d}X = \mathbb{P}\text{-}\lim \sum_{k=1}^m \frac{Y_{t_{k-1}} + Y_{t_k}}{2}(X_{t_k} - X_{t_{k-1}}) \quad (\max_k(t_k - t_{k-1}) \to 0).$$

命题 7.11. *设 $f \in C^3(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$. 对于连续半鞅 X^i, $i = 1, 2, \cdots, n$, 有*

$$f(X_t^1, \cdots, X_t^n) = f(X_0^1, \cdots, X_0^n) + \textstyle\sum_{i=1}^n \int_{s=0}^t \frac{\partial f}{\partial x^i}(X_s^1, \cdots, X_s^n) \circ \mathrm{d}X_s^i,$$

简记为 $\mathrm{d}f(X_t) = \frac{\partial f}{\partial x}(X_t) \circ \mathrm{d}X_t$.

证明. 记 $Z_t^i := \frac{\partial f}{\partial x^i}(X_t^1, \cdots, X_t^n)$, 则有 $\langle Z^i, X^i \rangle_t = \sum_{j=1}^n \int_{s=0}^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(X_s^1, \cdots, X_s^n)\,\mathrm{d}\langle X^j, X^i \rangle_s$. □

习题 7.1 ([1] 3.3.3)**.** *阅读 Itô 公式的证明.*

习题 7.2 ([1]: 1.5.9, 1.5.10, 1.5.8)**.** *掌握二次变差的放缩技巧.*

习题 7.3 (分部积分, [1] 3.3.12). 设 X 和 Y 是连续半鞅, 证明

$$\int_0^t X\,\mathrm{d}Y = X_tY_t - X_0Y_0 - \int_0^t Y\,\mathrm{d}X - \langle X,Y\rangle_t.$$

证明. 应用 Itô 公式, 即得 $X_tY_t = X_0Y_0 + \int_0^t X\,\mathrm{d}Y + \int_0^t Y\,\mathrm{d}X + \langle X,Y\rangle_t$. ■

习题 7.4. 设 $B=(B_t)_{t\in[0,1]}$ 是标准 *Brown* 运动, $X=(aB_t)_{t\in[0,1]}$, 其中 $a\in(0,1)\cup(1,\infty)$ 是常数. 证明 B 和 X 在 $(C([0,1]),\mathscr{B}_{C([0,1])})$ 上诱导的测度相互奇异.

证明. 易见 $X_{\#}\mathbb{P} := \mathbb{P}X^{-1}$ 集中于 $A_a := \{w\in C([0,1]) : \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2^n}|w(\frac{k}{2^n}) - w(\frac{k-1}{2^n})|^2 = a^2\}$. ■

8 Brown 运动的鞅刻画 (2021 年 10 月 25 日 +27 日)

定理 8.1 (Lévy). 设 $X=(X^1,\cdots,X^n)=(X_t^1,\cdots,X_t^n)_{t\ge0}$ 是适应于 $(\mathscr{F}_t)_{t\ge0}$ 的零初值 (n 维) 连续局部鞅, 且 $\langle X^i,X^j\rangle_t = \delta_{ij}t$, $\forall t\ge0$, $\forall i,j\in\{1,\cdots,n\}$, 则 X 是 $(\mathscr{F}_t)$-*Brown* 运动.

证明. 任取 $A\in\mathscr{F}_s$ 和 $\lambda\in\mathbb{R}^n$, 考虑 $\varphi(t) := \mathbb{E}[\mathrm{e}^{\sqrt{-1}\lambda\cdot(X_t-X_s)}\mathbb{1}_A]$, $t\ge s$. 由 Itô 公式和 Fubini 定理可得 $\varphi(t)-\varphi(s) = -\frac12|\lambda|^2\int_s^t\varphi(u)\,\mathrm{d}u$, 从而 $\varphi'(t) = -\frac12|\lambda|^2\varphi(t)$, 解得 $\varphi(t) = \mathrm{e}^{-\frac12|\lambda|^2(t-s)}\mathbb{P}(A)$. □

定义 8.2 (符号函数). $\operatorname{sgn} := \mathbb{1}_{(0,\infty)} - \mathbb{1}_{(-\infty,0]}$. 注意 $\operatorname{sgn}(0) = -1$.

例 8.3. 设 B 是一维标准 *Brown* 运动, H 是循序可测过程, 则 $\int\operatorname{sgn}(H)\,\mathrm{d}B$ 是 *Brown* 运动.

证明. $\langle\int\operatorname{sgn}(H)\,\mathrm{d}B\rangle_t = \int_{s=0}^t\operatorname{sgn}(H_s)^2\,\mathrm{d}\langle B\rangle_s = \int_0^t\mathrm{d}s = t$. □

例 8.4 (分支过程).

- 离散情形: $X_n = \sum_{k=1}^{X_{n-1}}\xi_{n,k}$, 其中 $\xi_{n,k}\sim(\mu,\sigma^2)$ 是 *i.i.d.* 随机变量. 易见

$$X_n - X_{n-1} = (\mu-1)X_{n-1} + \sigma\sum_{k=1}^{X_{n-1}}(\xi_{n,k}-\mu)/\sigma.$$

- *(Feller)* 设 $B^1,\cdots,B^n$ 是独立的标准 *Brown* 运动, 扩散过程 X^i 由 $\mathrm{d}X_t^i = \alpha X_t^i\,\mathrm{d}t + \sigma\sqrt{X_t^i}\,\mathrm{d}B_t^i$ 定义, 则 $S := \sum_{i=1}^n X^i$ 满足

$$\mathrm{d}S_t = \alpha S_t\,\mathrm{d}t + \sigma\sqrt{S_t}\,\mathrm{d}W_t,$$

其中 $W := \sum_{i=1}^n\int\sqrt{X^i/S}\,\mathrm{d}B^i$ 是一维标准 *Brown* 运动.

证明. $\langle W\rangle_t = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\int_{u=0}^t\frac{\sqrt{X_u^iX_u^j}}{S_u}\,\mathrm{d}\langle B^i,B^j\rangle_u = \sum_{i=1}^n\int_0^t\frac{X_u^i}{S_u}\,\mathrm{d}u = \int_0^t\mathrm{d}u = t$. □

定义 8.5 (Bessel 过程). 设 $B=(B^1,\cdots,B^n)$ 是 n 维标准 Brown 运动, 则 $R := |B| = \sqrt{\sum_{i=1}^n(B^i)^2}$ 称为 n 维 **Bessel 过程**.

命题 8.6. *Bessel* 过程具有 *Markov* 性.

命题 8.7. $n\ge2$ 维 *Bessel* 过程 $R=(R_t)_{t\ge0}$ 满足

$$\mathrm{d}R_t = \frac{n-1}{2R_t}\,\mathrm{d}t + \mathrm{d}W_t,$$

其中 $W := \sum_{i=1}^n\int(B^i/R)\,\mathrm{d}B^i$ 是一维标准 *Brown* 运动.

证明. 将平方根函数在 0 附近光滑化之后再应用 Itô 公式, 取极限即得 R 满足的随机微分方程. 另一方面, 计算可得 $\langle W\rangle_t = \sum_{i=1}^n\int_0^t\frac{(B_s^i)^2}{R_s^2}\,\mathrm{d}s = t$. □

命题 8.8 (扩散过程的首中概率). 设 $\xi=(\xi_t)_{t\geq 0}$ 满足 $\mathrm{d}\xi_t=b(\xi_t)\,\mathrm{d}t+\sigma(\xi_t)\,\mathrm{d}B_t$, 其中 B 是一维标准 *Brown* 运动, 则 $\mathbb{P}(\xi_\tau=l\,|\,\xi_0=x)=\frac{S(r)-S(x)}{S(r)-S(l)}$, $\forall l\leq x\leq r$, 其中 $\tau:=\inf\{t:\xi_t\in\{l,r\}\}$, 而 $S(x):=\int^x \mathrm{e}^{-\int^y \frac{2b(z)}{\sigma(z)^2}\,\mathrm{d}z}\,\mathrm{d}y$ 是常微分方程 $\big(\frac{1}{2}\sigma(x)^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}+b(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big)S(x)=0$ 的解.

证明. 由 Itô 公式可知 $(S(\xi_t))_{t\geq 0}$ 是连续局部鞅, 停止于 τ 得到有界鞅, 故 $\mathbb{E}S(\xi_\tau)=\mathbb{E}S(\xi_0)$. □

命题 8.9. $n\geq 2$ 维 *Bessel* 过程 $R=(R_t)_{t\geq 0}$ 满足 $\mathbb{P}\{R_t>0,\ \forall t>0\}=1$, 即 $\inf\{t>0:R_t=0\}\overset{\text{a.s.}}{=}\infty$.

证明. 只需考虑 $n=2$, 此时 $\log R$ 是局部鞅. 如果 $R_0=r>0$, 应用可选停止定理并取极限. 如果 $R_0=0$, 通过 Markov 性利用已有结果. □

习题 8.1 ([1] 3.3.17). 设 $B=(B^1,B^2,B^3)$ 是零初值 3 维标准 *Brown* 运动, 定义 $X:=\prod_{i=1}^3\operatorname{sgn}(B_1^i)$. 证明 (B^1,B^2)、(B^1,XB^3) 和 (B^2,XB^3) 都是 2 维 *Brown* 运动, 但是 (B^1,B^2,XB^3) 不是 3 维 *Brown* 运动. 解释此例为何不违反 *Brown* 运动的鞅刻画.

证明. 由于 $X\sim\mathrm{Uniform}(\{\pm 1\})$ 独立于 (B^1,B^3), 可得 (B^1,XB^3) 是适应于 $(\mathscr{F}_t^{B^1}\vee\sigma(X)\vee\mathscr{F}_t^{B^3})_{t\geq 0}$ 的 2 维标准 Brown 运动; 类似地, (B^2,XB^3) 是适应于 $(\mathscr{F}_t^{B^2}\vee\sigma(X)\vee\mathscr{F}_t^{B^3})_{t\geq 0}$ 的 2 维标准 Brown 运动. 易见 $B_1^1B_1^2XB_1^3=\prod_{i=1}^3|B_1^i|\geq 0$, 因而 (B^1,B^2,XB^3) 不是 Brown 运动. 事实上, 不存在滤流使 (B^1,B^2,XB^3) 成为局部鞅, 也就无法应用 Brown 运动的鞅刻画. ■

习题 8.2. 阅读应用随机分析 *(2021)* 第 *6.5.2* 小节: 一维扩散过程的自然尺度和速度测度.

习题 8.3 ([2] 命题 1.1). 掌握 *Brown* 运动的特征函数刻画.

9 鞅表示 · Itô 积分 (2021 年 10 月 27 日)

例 9.1. 设 $M=(M_t)_{t\geq 0}\in\mathcal{M}_{\mathrm{cts,loc}}$, 存在循序可测过程 $H=(H_t)_{t\geq 0}$ 使得 $\langle M\rangle_t=\int_0^t H_s^2\,\mathrm{d}s$, $\forall t$. 若 H 严格大于零, 令 $B_t:=\int_{s=0}^t H_s^{-1}\,\mathrm{d}M_s$, 则 $B=(B_t)_{t\geq 0}$ 是标准 *Brown* 运动, 且 $M=\int H\,\mathrm{d}B$.

定义 9.2 (扩张). 概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},\mathbb{P})$ 扩张为 $(\Omega\times\tilde{\Omega},\mathscr{F}\otimes\tilde{\mathscr{F}},\mathbb{P}\otimes\tilde{\mathbb{P}})$, 其中 $(\tilde{\Omega},\tilde{\mathscr{F}},\tilde{\mathbb{P}})$ 也是概率空间, 则随机变量 $\omega\mapsto X(\omega)$ 扩张为 $(\omega,\tilde{\omega})\mapsto X(\omega)$.

定理 9.3. 设 $M=(M^1,\cdots,M^n)$ 是 *(n 维)* 连续局部鞅, 每个互特征 $\langle M^i,M^j\rangle$ 都 a.s. 绝对连续, 则存在扩张概率空间上的 *(n 维)* 标准 *Brown* 运动 $B=(B^1,\cdots,B^n)$ 和 *(*$n\times n$ *维)* 循序可测过程 $H=(H_j^i)_{1\leq j\leq n}^{1\leq i\leq n}\in\mathcal{L}_{\mathrm{loc}}^*(B)$, 使得 $M=M_0+\int H\,\mathrm{d}B$.

证明. 利用 $\sqrt{\mathrm{d}\langle M,M\rangle_t/\,\mathrm{d}t}$ 的谱分解, 通过扩张概率空间处理特征值为零的事件. □

习题 9.1 ([1]: 3.3.21, 3.3.22, 3.4.2). 阅读证明.

习题 9.2. 设 (B^1,B^2) 是初值非零的 2 维 *Brown* 运动. 考虑 B^1B^2 与 $\log\big((B^1)^2+(B^2)^2\big)$, 判断是否是鞅; 如果不是, 判断是否是局部鞅.

解. 由 Itô 公式, 可得 $B^1B^2=B_0^1B_0^2+\int B^2\,\mathrm{d}B^1+\int B^1\,\mathrm{d}B^2$ 和

$$\log\big((B^1_{\cdot\wedge\tau_n})^2+(B^2_{\cdot\wedge\tau_n})^2\big)=\log\big((B_0^1)^2+(B_0^2)^2\big)+\int_{s=0}^{\cdot\wedge\tau_n}\frac{2B_s^1}{(B_s^1)^2+(B_s^2)^2}\,\mathrm{d}B_s^1+\int_{s=0}^{\cdot\wedge\tau_n}\frac{2B_s^2}{(B_s^1)^2+(B_s^2)^2}\,\mathrm{d}B_s^2$$

是鞅, 其中 $\tau_n:=\inf\{t:(B_t^1)^2+(B_t^2)^2\leq[(B_0^1)^2+(B_0^2)^2]/2^n\}\nearrow\infty$ (a.s.), 这也说明 $\log\big((B^1)^2+(B^2)^2\big)$ 是局部鞅. 而 $\mathbb{E}\log\big((B_t^1)^2+(B_t^2)^2\big)\gtrsim\log t\xrightarrow[t\to\infty]{}\infty$, 故 $\log\big((B^1)^2+(B^2)^2\big)$ 不是鞅. ////

习题 9.3 (平方 Bessel 过程). 设 $X = (X_t)_{t\geq 0}$ 适合 $\mathrm{d}X_t = n\,\mathrm{d}t + 2\sqrt{X_t}\,\mathrm{d}B_t$, 其中 n 是 > 1 整数, $B = (B_t)_{t\geq 0}$ 是标准 *Brown* 运动. 令 $\tau_0 := \inf\{t : X_t = 0\}$. 证明 $\mathbb{P}(\tau_0 = \infty \,|\, X_0 = x) = 1$, $\forall x > 0$.

证明. 记 $S(x) := \int^x y^{-n/2}\,\mathrm{d}y$ 和 $\tau_x := \inf\{t : X_t = x\}$, 则对于充分大的 p 和 q, 命题8.8给出 $\mathbb{P}(\tau_{\frac{1}{p}} < \tau_q \,|\, X_0 = x) = \frac{S(q)-S(x)}{S(q)-S(\frac{1}{p})}$. 令 $p \nearrow \infty$, 即得 $\mathbb{P}(\tau_0 < \tau_q \,|\, X_0 = x) = 0$, 因为 $n/2 \geq 1$. 再令 $q \nearrow \infty$, 则有 $\tau_q \nearrow \tau_\infty$, 从而 $\mathbb{P}(\tau_0 < \tau_\infty \,|\, X_0 = x) = 0$. 注意 $\tau_\infty \overset{\text{a.s.}}{=} \infty$, 因为 $\mathbb{E}X_t = \mathbb{E}X_0 + nt < \infty$. ∎

习题 9.4 ([1] 3.3.23). 设 $R = (R_t)_{t\geq 0}$ 是 n 维 *Bessel* 过程, $R_0 = r > 0$. 令 $m := \inf_{t\geq 0} R_t$. 证明:

1. 若 $n = 2$, 则 $m \overset{\text{a.s.}}{=} 0$.

   证明. 记 $\tau_x := \inf\{t : R_t = x\}$. 任取 $a \in (0, r)$ 和 $b \in (r, \infty)$, 对 $\log R^{\tau_a}$ 应用可选停止定理, 可得 $\mathbb{P}\{\tau_a < \tau_b\}\log a + \mathbb{P}\{\tau_a > \tau_b\}\log b = \mathbb{E}\log R_{\tau_a\wedge\tau_b} = \log r$, 进而 $\mathbb{P}\{\tau_a < \tau_b\} = \frac{\log b - \log r}{\log b - \log a}$. 令 $b \nearrow \infty$, 则有 $\mathbb{P}\{\tau_a < \infty\} = 1$, 于是 $m \leq a$ (a.s.). 再令 $a \searrow \infty$, 即得 $0 \leq m \leq 0$ (a.s.). ∎

2. 若 $n \geq 3$, 则 $\mathbb{P}\{m \leq a\} = (a/r)^{n-2}$, $\forall a \in (0, r)$.

   证明. 记 $\tau_x := \inf\{t : R_t = x\}$. 任取 $a \in (0, r)$ 和 $b \in (r, \infty)$, 对 $(R^{2-n})^{\tau_a}$ 应用可选停止定理, 可得 $\mathbb{P}\{\tau_a < \tau_b\}a^{2-n} + \mathbb{P}\{\tau_a > \tau_b\}b^{2-n} = \mathbb{E}R^{2-n}_{\tau_a\wedge\tau_b} = r^{2-n}$, 进而 $\mathbb{P}\{\tau_a < \tau_b\} = \frac{b^{2-n}-r^{2-n}}{b^{2-n}-a^{2-n}}$. 令 $b \nearrow \infty$, 则有 $\mathbb{P}\{m \leq a\} = \mathbb{P}\{\tau_a < \infty\} = \frac{r^{2-n}}{a^{2-n}} = (a/r)^{n-2}$. ∎

习题 9.5 ([1] 3.3.24). 设 $R = (R_t)_{t\geq 0}$ 是 $n \geq 3$ 维 *Bessel* 过程. 证明 $\mathbb{P}\{\lim_{t\to\infty} R_t = \infty\} = 1$.

证明. 任取 $K \in (0, \infty)$, 只需证明 $\{\liminf_{t\to\infty} R_t \leq K\}$ 是 $\mathbb{P}$-零测集. 利用强 Markov 性, 习题9.4蕴涵 $\mathbb{P}(\inf_{t\geq T} R_t \leq K \,|\, R_T) = (K/R_T)^{n-2} \wedge 1$, $\forall T \geq 0$. 进一步地, $\mathbb{P}\{\inf_{t\geq T} R_t \leq K\} \leq \mathbb{E}(K/\sqrt{TY})^{n-2}$, 其中 $Y \sim \chi^2_n$ 满足 $\mathbb{E}Y^{-n/2+1} < \infty$. 令 $T \nearrow \infty$, 即证所欲. ∎

10 鞅表示 · 时间变换 (2021 年 11 月 3 日 +8 日)

例 10.1. 微分几何中曲线可以用弧长进行重参数化, 由此可知弧长在物理上是固有时.

定理 10.2 (Dambis–Dubins–Schwarz). 设 $M \in \mathcal{M}_{\text{cts,loc}}$ 满足 $\langle M\rangle_\infty \overset{\text{a.s.}}{=} \infty$. 令 $\tau_s := \inf\{t : \langle M\rangle_t > s\}$, 则 $B_s := M_{\tau_s}$ 是关于滤流 $\mathscr{G}_s := \mathscr{F}_{\tau_s}$ 的标准 *Brown* 运动. 进一步地, $\mathbb{P}\{M_t = B_{\langle M\rangle_t}, \forall t\} = 1$.

考虑一般的 $M \in \mathcal{M}_{\text{cts,loc}}$, 允许 $\mathbb{P}\{\langle M\rangle_\infty < \infty\} > 0$, 那么存在扩张概率空间上的 *Brown* 运动 β, 使得 $B_s := M_{\tau_s}\mathbb{1}_{\{s<\langle M\rangle_\infty\}} + (M_\infty + \beta_{s-\langle M\rangle_\infty})\mathbb{1}_{\{s\geq\langle M\rangle_\infty\}}$ 为标准 *Brown* 运动.

例 10.3. 设 $B = B^1 + \sqrt{-1}B^2$ 是复 *Brown* 运动, f 是全纯函数. 令 $\tau_s := \inf\{t : \int_0^t |f'(B_r)|^2\,\mathrm{d}r > s\}$, 则 $f(B_{\tau_\bullet})$ 是复 *Brown* 运动.

证明. 对 $M := f(B)$ 应用 Itô 公式: 由 f 调和可得 M 是连续局部鞅, 由 Cauchy–Riemann 方程可得 $\mathrm{d}\langle \operatorname{Re} M\rangle_t = \mathrm{d}\langle \operatorname{Im} M\rangle_t = |f'(B_t)|^2\,\mathrm{d}t$ 和 $\langle \operatorname{Re} M, \operatorname{Im} M\rangle = 0$. ([5] 7.18) □

例 10.4. 为了证明 $X_n \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1)$, 可尝试构造 $M^{(n)} \in \mathcal{M}_{\text{cts,loc}}$ 适合 $M^{(n)}_1 = X_n$. 存在零初值标准 *Brown* 运动 $B^{(n)}$ 使得 $M^{(n)} = B^{(n)}_{\langle M^{(n)}\rangle_\bullet}$, 因此只需 $\langle M^{(n)}\rangle_1 \to 1$.

习题 10.1. 设 B 是一维标准 *Brown* 运动, $H \in \mathcal{L}^*_{\text{loc}}(B)$. 证明: 若 $\langle \int H\,\mathrm{d}B\rangle_\cdot = f(\cdot)$ 是严格单调递增的非随机函数, 则 $\int H\,\mathrm{d}B$ 是独立增量过程, 并且 $\int_{u=s}^t H_u\,\mathrm{d}B_u \sim \mathcal{N}(0, f(t) - f(s))$, $\forall t > s$.

证明. 由 DDS 定理10.2可知 $W := \int_0^{f^{-1}(\cdot)} H\,\mathrm{d}B$ 是指标集为 $[0, f(\infty))$ 的标准 Brown 运动, 从而 $\int H\,\mathrm{d}B = W_{f(\cdot)}$ 具有独立增量, 并且 $\int_{u=s}^t H_u\,\mathrm{d}B_u = W_{f(t)} - W_{f(s)} \sim \mathcal{N}(0, f(t) - f(s))$. ∎

习题 10.2. *构造连续局部鞅 $(M_t)_{t\in[0,1]}$ 使其特征为 Cantor 函数 c.*

解. 设 B 为标准 Brown 运动, 则 $M := B_{c(\cdot)}$ 即为所求. ////

习题 10.3 ([3]: V.1.6, V.1.7)**.** *阅读 DDS 定理的证明.*

习题 10.4 ([3] V.1.8)**.** *阅读证明: 设 M 是连续局部鞅, 则 $\{\langle M\rangle_\infty < \infty\} \overset{\text{a.s.}}{=} \{\lim_{t\to\infty} M_t$ 存在且有限$\}$, 在 $\{\langle M\rangle_\infty = \infty\}$ 上有 $\limsup_{t\to\infty} M_t \overset{\text{a.s.}}{=} \infty$ 和 $\liminf_{t\to\infty} M_t \overset{\text{a.s.}}{=} -\infty$.*

习题 10.5 ([3] V.1.15)**.** *设 M 是连续局部鞅, 证明在 $\{\langle M\rangle_\infty = \infty\}$ 上有*

$$\limsup_{t\to\infty} M_t/\sqrt{2\langle M\rangle_t \log\log\langle M\rangle_t} \overset{\text{a.s.}}{=} 1.$$

证明. 通过 DDS 定理化为 Brown 运动的重对数律. ■

习题 10.6 ([3] V.1.20)**.** *设 X 是连续半鞅, m 是 Lebesgue 测度. 证明*

$$m\{t \ge 0 : \limsup_{\varepsilon\searrow 0} \varepsilon^{-\alpha}|X_{t+\varepsilon} - X_t| > 0\} \overset{\text{a.s.}}{=} 0, \quad \forall \alpha \in (0, 1/2).$$

证明. 有限变差函数可导所以只需考虑 X 的局部鞅成分, 接下来通过 DDS 定理化为 Brown 运动的 Hölder 连续性, 其中用到 $\langle X\rangle_t$ 关于 t 几乎处处可导. ■

习题 10.7 (被积过程不是局部平方可积则无法得到良定义的 Itô 积分, [1] 3.4.11)**.** *设 W 是标准 Brown 运动, X 是可测适应过程, $\mathbb{P}\{\int_0^t X_s^2\,\mathrm{d}s < \infty\} = 1$, $\forall t \in [0,1)$. 证明在 $\{\int_0^1 X_s^2\,\mathrm{d}s = \infty\}$ 上有 $\limsup_{t\nearrow 1}\int_{s=0}^t X_s\,\mathrm{d}W_s \overset{\text{a.s.}}{=} \infty$ 和 $\liminf_{t\nearrow 1}\int_{s=0}^t X_s\,\mathrm{d}W_s \overset{\text{a.s.}}{=} -\infty$.*

证明. 令 $M_t := \int_{s=0}^{t/(1+t)} X_s\,\mathrm{d}W_s$, 则 $\langle M\rangle_t = \int_0^{t/(1+t)} X_s^2\,\mathrm{d}s$. 由 DDS 定理可得标准 Brown 运动 B, 使得 $M = B_{\langle M\rangle_\bullet}$, 进而 $\int_{s=0}^t X_s\,\mathrm{d}W_s = M_{t/(1-t)} = B_{\langle M\rangle_{t/(1-t)}} = B_{\int_0^t X_s^2\,\mathrm{d}s}$. ■

习题 10.8 ([1] 3.4.12)**.** *考虑连续半鞅 $X = x + M + A$, 其中初值 $x \in \mathbb{R}$ 给定, $M \in \mathcal{M}_{\text{cts,loc}}$, 且 A 是有限变差连续过程. 设存在常数 $\rho > 0$ 使得 a.s. 成立 $|A_t| \vee \langle M\rangle_t \le \rho t$, $\forall t \ge 0$. 证明对固定的 $T > 0$ 和充分大的 n, 有 $\mathbb{P}\{\max_{t\in[0,T]}|X_t| \ge n\} \le \exp(-\frac{n^2}{18\rho T})$.*

证明. 由 DDS 定理可得零初值标准 Brown 运动 B 使得 $M = B_{\langle M\rangle_\bullet}$. 记 $m := n - |x| - \rho T$, 依题设可知 $\{\max_{t\in[0,T]}|X_t| \ge n\} \subset \{\max_{t\in[0,T]}|M_t| \ge m\} \subset \{\max_{t\in[0,\rho T]}|B_t| \ge m\}$. 注意 $\max_{t\in[0,\rho T]} B_t \overset{d}{=} |B_{\rho T}|$, 于是 $\mathbb{P}\{\max_{t\in[0,T]}|X_t| \ge n\} \le 2\,\mathbb{P}\{|B_{\rho T}| \ge m\} = 4\,\mathbb{P}\{B_{\rho T} \ge m\} = 4(1 - \Phi(\frac{m}{\sqrt{\rho T}}))$, 其中标准正态分布函数 $\Phi(z) := \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{u^2}{2})\,\mathrm{d}u$ 满足 $\sqrt{2\pi}(1 - \Phi(z)) \le \frac{1}{z}\exp(-\frac{z^2}{2})$, $\forall z > 0$. ■

命题 10.5 (换元积分)**.** *承定理 10.2, 设 $X \in \mathcal{L}^*_{\text{loc}}(M)$, 令 $Y_s := X_{\tau_s}\mathbb{1}_{\{s<\langle M\rangle_\infty\}}$, 则 $Y \in \mathcal{L}^*_{\text{loc}}(B)$, 且 $\int X\,\mathrm{d}M = \int_0^{\langle M\rangle_\bullet} Y\,\mathrm{d}B$, 等价地有 $\int_0^{\tau_\bullet} X\,\mathrm{d}M = \int Y\,\mathrm{d}B$.*

定理 10.6 (Knight)**.** *设 $M = (M^1, \cdots, M^n)$ 是 (n 维) 连续局部鞅, $\langle M^i\rangle_\infty = \infty$ 且 $\langle M^i, M^j\rangle = 0$, $\forall i \ne j$. 令 $\tau_s^i := \inf\{t : \langle M^i\rangle_t > s\}$, 则 $B_s^i := M^i_{\tau_s^i}$ 是 n 个独立的一维标准 Brown 运动.*

11 鞅表示 · Brown 泛函 (2021 年 11 月 8 日 +10 日)

设 $B = (B^1, \cdots, B^n)$ 是 (n 维) 标准 Brown 运动, 其自然滤流进行通常化扩张得到 $(\mathscr{F}_t)_{t\ge 0}$.

定理 11.1. *任取 $M \in \mathcal{M}^2$, 存在唯一的 (n 维) 过程 $H = (H^i)^{1\le i\le n} \in \mathcal{L}^*(B)$, 使得 $M = \sum_{i=1}^n \int H^i\,\mathrm{d}B^i$. 特别地, $\mathcal{M}^2 = \mathcal{M}^2_{\text{cts}}$.*

推论 11.2. 任取 $\xi \in L^2(\mathscr{F}_\infty)$, 存在唯一的 $(n$ 维$)$ 过程 $H = (H^i)^{1\le i\le n} \in \mathcal{L}^*_\infty(B)$, 使得

$$\xi = \mathbb{E}[\xi|\mathscr{F}_0] + \textstyle\sum_{i=1}^n \int_0^\infty H^i \,\mathrm{d}B^i.$$

例 11.3 (Clark–Ocone 公式)**.** 当 $n = 1$ 时, 对于 $f \in W^{1,2}(\mathcal{N}(0,1))$, 令 $u(t,x) := \mathbb{E}[f(B_T)\,|\,B_t = x]$. 将 *Kolmogorov* 向后方程 $\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ 代入 *Itô* 公式, 可得

$$f(B_T) = u(T,B_T) = u(0,B_0) + \int_{t=0}^T \frac{\partial u}{\partial x}(t,B_t)\,\mathrm{d}B_t = \mathbb{E}[f(B_T)|\mathscr{F}_0] + \int_{t=0}^T \mathbb{E}[f'(B_T)|\mathscr{F}_t]\,\mathrm{d}B_t.$$

习题 11.1 ([1]: §3.4.D, §3.4.E; [2] §1.11)**.** 阅读.

注意 *Itô* 积分表示的唯一性需要平方可积条件, 否则有反例 $\int_{s=0}^1 \mathbb{1}_{\{s\le\tau\}}(1-s)^{-1/2}\,\mathrm{d}B_s \overset{\text{a.s.}}{=} 0$, 其中 $(B_s)_{s\in[0,1]}$ 是一维标准 *Brown* 运动, $\tau := \inf\{t > 1/2 : \int_{s=0}^t (1-s)^{-1/2}\,\mathrm{d}B_s = 0\}$.

习题 11.2. 设 $B = (B_t)_{t\ge0}$ 是零初值标准 *Brown* 运动, $(\mathscr{F}_t)_{t\ge0}$ 是自然滤流 $(\mathscr{F}_t^B)_{t\ge0}$ 的通常化扩张. 求 $H = (H_t)_{t\ge0} \in \mathcal{L}^*(B)$ 使得 $B_1^3 = \int_0^1 H\,\mathrm{d}B$.

解. 根据 Clark–Ocone 公式, 应取 $H_t = 3\,\mathbb{E}[B_1^2|\mathscr{F}_t] = 3(B_t^2 - t + 1)$, $t \in [0,1]$. ////

习题 11.3 ([3] V.3.16)**.** 设 $B = (B_t)_{t\ge0}$ 是标准 *Brown* 运动, $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是有界的可测函数. 显式求出 $\mathrm{e}^{\int_0^T \phi(B_s)\,\mathrm{d}s}$ 的 *Itô* 积分表示, 其中 T 固定. (类似 Feynman–Kac 公式)

解. 考虑 $M_t := v(t,B_t)\,\mathrm{e}^{\int_0^t \phi(B_s)\,\mathrm{d}s}$, $t \in [0,T]$, 其中 $v \in C^{1,2}([0,T]\times\mathbb{R};\mathbb{R})$ 待定. 由 Itô 公式,

$$\begin{aligned}\mathrm{d}M_t &= \mathrm{e}^{\int_0^t \phi(B_s)\,\mathrm{d}s}\,\mathrm{d}v(t,B_t) + v(t,B_t)\,\mathrm{d}\mathrm{e}^{\int_0^t \phi(B_s)\,\mathrm{d}s} + \mathrm{d}\langle v(t,B_t), \mathrm{e}^{\int_0^t \phi(B_s)\,\mathrm{d}s}\rangle \\ &= \mathrm{e}^{\int_0^t \phi(B_s)\,\mathrm{d}s}\left[\Big(\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \phi(B_t)v\Big)(t,B_t)\,\mathrm{d}t + \frac{\partial v}{\partial x}(t,B_t)\,\mathrm{d}B_t\right].\end{aligned}$$

存在唯一的 v 满足 $\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \phi v = 0$ 和 $v(T,\cdot) \equiv 1$, 进而

$$\mathrm{e}^{\int_0^T \phi(B_s)\,\mathrm{d}s} = M_T = M_0 + \textstyle\int_0^T \mathrm{d}M = v(0,B_0) + \int_0^T H\,\mathrm{d}B,$$

其中 $H_t := \mathrm{e}^{\int_0^t \phi(B_s)\,\mathrm{d}s}\frac{\partial v}{\partial x}(t,B_t)$, $t \in [0,T]$. ////

12 Wiener 混沌分解 (2021 年 11 月 10 日 +17 日)

定义 12.1 (随机指数)**.** 连续半鞅 $X = (X_t)_{t\ge0}$ 的 **Doléans-Dade 指数**为 $\mathcal{E}(X) := (\mathrm{e}^{X_t - X_0 - \frac{1}{2}\langle X\rangle_t})_{t\ge0}$.

命题 12.2. 设 X 是连续半鞅, 则 $Y = Y_0\mathcal{E}(X)$ 是随机微分方程 $\mathrm{d}Y_t = Y_t\,\mathrm{d}X_t$ 的唯一解.

推论 12.3. 设 M 是连续局部鞅, 则 $\mathcal{E}(M)$ 是初值为 1 的连续局部鞅, 并且是上鞅. (☞ **定理13.8**)

定义 12.4 (Hermite 多项式)**.** $H_n(x) := H_n(x,1)$, $H_n(x,y) := \frac{\partial^n}{\partial\lambda^n}\big|_{\lambda=0}\mathrm{e}^{\lambda x - \frac{1}{2}\lambda^2 y}$, $n = 0,1,2,3,\cdots$.

例 12.5. 设 X 是零初值连续半鞅, 则 $\mathcal{E}(\lambda X)_t = \sum_{n=0}^\infty \frac{\lambda^n}{n!}H_n(X_t,\langle X\rangle_t)$, $t \ge 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

特别地, $M \in \mathcal{M}_{\text{cts,loc}} \implies H_n(M,\langle M\rangle) = \frac{\partial^n}{\partial\lambda^n}\big|_{\lambda=0}\mathcal{E}(\lambda M) \in \mathcal{M}_{\text{cts,loc}}$, $\forall n \ge 1$.

命题 12.6.

- $H_n(x,y) = H_n(x/\sqrt{y})\,y^{n/2}$.
- $H_n(x) = (-1)^n\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x})^2}x^n$.
- $H_n'(x) = nH_{n-1}(x)$.

- $H_{n+1}(x) = xH_n(x) - H_n'(x)$.
- $\int_{-\infty}^{\infty} H_m(x)H_n(x)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x = n!\,\delta_{mn}$.

命题 12.7. *设 X 是零初值连续半鞅, 则 $H_n(X_t, \langle X\rangle_t) = n!\int_{t_n=0}^{t}\int_{t_{n-1}=0}^{t_n}\cdots\int_{t_1=0}^{t_2}\mathrm{d}X_{t_1}\ldots\mathrm{d}X_{t_{n-1}}\,\mathrm{d}X_{t_n}$.*

证明. 因为 $(\frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2})H_n(x,y) = 0$, 由 Itô 公式可得 $\mathrm{d}H_n(X_t,\langle X\rangle_t) = nH_{n-1}(X_t,\langle X\rangle_t)\,\mathrm{d}X_t$. □

定理 12.8 (Wiener–Itô)**.** *考虑样本空间 $\Omega := C([0,T];\mathbb{R})$, 配备 Wiener 测度 $\mathbb{P}^W$, 从而有零初值标准 Brown 运动 $W : (t,w) \in [0,T]\times\Omega \mapsto W_t(w) := w(t) \in \mathbb{R}$. 此时成立正交分解*

$$L^2(\mathbb{P}^W) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} H^{\otimes_{\mathrm{sym}} n},$$

*其中 $H^{\otimes_{\mathrm{sym}} n} := \overline{\mathrm{span}\{H_n(\int_0^T h\,\mathrm{d}W) : h \in L^2([0,T]),\ \|h\| = 1\}}$ 称为 n 阶 **Wiener 混沌**.*

证明. 借助特征函数可得 $\mathcal{E}(\int h\,\mathrm{d}W)_T \in \bigoplus_{n=0}^{\infty} H^{\otimes_{\mathrm{sym}} n}$ 张成的线性子空间在 $L^2(\mathbb{P}^W)$ 中稠密. □

习题 12.1 ([1] 3.3.31)**.** *验证 Hermite 多项式的性质.*

13 测度变换 (2021 年 11 月 17 日 +22 日)

例 13.1. *考虑独立的 $X_i \underset{\mathbb{P}}{\sim} \mathcal{N}(\mu_i, 1)$, $i = 1,2,\cdots,n$. 通过*

$$\mathrm{d}\tilde{\mathbb{P}}/\,\mathrm{d}\mathbb{P} = \mathrm{e}^{-\sum_{i=1}^n \mu_i X_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \mu_i^2} = \mathrm{e}^{-\sum_{i=1}^n \mu_i(X_i-\mu_i) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \mu_i^2}$$

定义 $\tilde{\mathbb{P}}$, 则有 $X_i \underset{\tilde{\mathbb{P}}}{\overset{\text{i.i.d.}}{\sim}} \mathcal{N}(0,1)$.

定理 13.2 (Girsanov)**.** *设 $M \in \mathcal{M}_{\mathrm{cts,loc}}(\mathbb{P})$, 并且 $\mathcal{E}(M)$ 是 $\mathbb{P}$-鞅, 则存在唯一的概率测度 $\tilde{\mathbb{P}}$ 适合*

$$\mathrm{d}\tilde{\mathbb{P}}/\,\mathrm{d}\mathbb{P}\,\big|_{\mathscr{F}_t} = \mathcal{E}(M)_t = \mathrm{e}^{M_t - \frac{1}{2}\langle M\rangle_t}, \quad \forall t \geq 0,$$

([1] 3.5.20; [2] 定理 2.12) *此时任取 $N \in \mathcal{M}_{\mathrm{cts,loc}}(\mathbb{P})$ 都有 $N - \langle N, M\rangle \in \mathcal{M}_{\mathrm{cts,loc}}(\tilde{\mathbb{P}})$.*
特别地, X 是 $\mathbb{P}$-连续半鞅当且仅当 X 是 $\tilde{\mathbb{P}}$-连续半鞅, 并且其特征 $\langle X\rangle$ 不依赖概率测度的选取.

注 13.3. 在 $\mathscr{F}_\infty$ 上 $\mathbb{P}$ 关于 $\tilde{\mathbb{P}}$ 绝对连续; 事实上, $\mathrm{d}\mathbb{P}/\,\mathrm{d}\tilde{\mathbb{P}}\,\big|_{\mathscr{F}_t} = \mathrm{e}^{-M_t + \frac{1}{2}\langle M\rangle_t} = \mathcal{E}(\langle M\rangle - M)_t$, $\forall t \geq 0$.

推论 13.4. *承定理 13.2, 若 B 是 $\mathbb{P}$-Brown 运动, 则 $B - \langle B, M\rangle$ 是 $\tilde{\mathbb{P}}$-Brown 运动.*

定理 13.5 (Cameron–Martin)**.** *设 B 是 $\mathbb{P}$-标准 Brown 运动, $H = (H_t)_{t\geq 0} \in \mathcal{L}^*_{\mathrm{loc}}(B)$, 且*

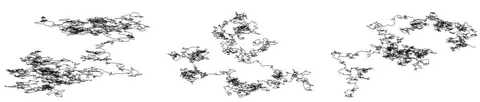
$$\mathrm{d}\tilde{\mathbb{P}}/\,\mathrm{d}\mathbb{P}\,\big|_{\mathscr{F}_t} = \mathcal{E}(\textstyle\int H\,\mathrm{d}B)_t = \mathrm{e}^{\int_0^t H\,\mathrm{d}B - \frac{1}{2}\int_0^t H_s^2\,\mathrm{d}s} \quad (t \geq 0)$$

是 $\mathbb{P}$-鞅, 则 $\big(B_t - \int_0^t H_s\,\mathrm{d}s\big)_{t\geq 0}$ 是 $\tilde{\mathbb{P}}$-标准 Brown 运动. 上述结果不难推广至多维.

例 13.6. *设 $(B_t)_{t\in[0,T]}$ 是零初值标准 Brown 运动, $f : [0,T] \to \mathbb{R}$ 绝对连续, $f(0) = 0$ 且 $f' \in L^2([0,T])$. 任取 $\varepsilon > 0$, 有 $\mathbb{P}\{\max_{t\in[0,T]}|B_t - f(t)| < \varepsilon\} > 0$.*

证明. 在定理13.5中取 $H_t := f'(t)$, 即得与 $\mathbb{P}$ 相互绝对连续的 $\tilde{\mathbb{P}}$, 使 $\tilde{B}_t := B_t - f(t) = B_t - \int_0^t f'(s)\,\mathrm{d}s$ 成为 $\tilde{\mathbb{P}}$-Brown 运动. 此时, 只需 $\tilde{\mathbb{P}}\{\max_{t\in[0,T]}|\tilde{B}_t| < \varepsilon\} > 0$. □

类似地, 多维 Brown 运动以正概率近似向量值光滑函数.



例 13.7 (Brown 运动首中时). 设 $(B_t)_{t\geq 0}$ 是零初值标准 *Brown* 运动, $T_b := \inf\{t \geq 0 : B_t = b\}$, $b \in \mathbb{R}$. 熟知 $\mathbb{P}\{T_b \in \mathrm{d}t\} = \frac{|b|}{\sqrt{2\pi t^3}} \mathrm{e}^{-\frac{b^2}{2t}}\,\mathrm{d}t$ 和 $\mathbb{E}\,\mathrm{e}^{-aT_b} = \mathrm{e}^{-|b|\sqrt{2a}}$, $a \geq 0$. 下面考虑

$$T_b^{(\mu)} := \inf\{t \geq 0 : B_t + \mu t = b\},$$

其中 $\mu \in \mathbb{R}$ 是漂移系数. 定义概率 $\tilde{\mathbb{P}}$ 适合 $\mathrm{d}\tilde{\mathbb{P}}/\,\mathrm{d}\mathbb{P}\big|_{\mathscr{F}_t} = Z_t := \mathrm{e}^{\mu B_t - \frac{1}{2}\mu^2 t}$, $\forall t \geq 0$, 则 $(B_t - \mu t)_{t\geq 0}$ 是零初值 $\tilde{\mathbb{P}}$-标准 *Brown* 运动. 故

$$\mathbb{P}\{T_b^{(\mu)} \leq t\} = \tilde{\mathbb{P}}\{T_b \leq t\} = \mathbb{E}\big[Z_t \mathbb{1}_{\{T_b\leq t\}}\big] = \mathbb{E}\big[Z_{T_b} \mathbb{1}_{\{T_b\leq t\}}\big] = \mathrm{e}^{\mu b}\,\mathbb{E}\big[\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\mu^2 T_b} \mathbb{1}_{\{T_b\leq t\}}\big],$$

进而有 $\mathbb{P}\{T_b^{(\mu)} < \infty\} = \mathrm{e}^{\mu b - |\mu b|}$ 和 $\mathbb{P}\{T_b^{(\mu)} \in \mathrm{d}t\} = \mathrm{e}^{\mu b - \frac{1}{2}\mu^2 t}\,\mathbb{P}\{T_b \in \mathrm{d}t\} = \frac{|b|}{\sqrt{2\pi t^3}}\mathrm{e}^{-\frac{(b-\mu t)^2}{2t}}\,\mathrm{d}t$.

定理 13.8. 设 $M = (M_t)_{t\in[0,T]} \in \mathcal{M}_{\mathrm{cts,loc}}$, 其中 $T \in [0,\infty]$ 固定, 则下述条件满足 (1) ⇒ (2) ⇒ (3).

(1) $\mathbb{E}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\langle M\rangle_T} < \infty$. (Novikov)

(2) $\sup_{停时\ \tau\leq T}\mathbb{E}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}M_\tau} < \infty$, 从而 $M \in \mathcal{M}^2$. (Kazamaki)

(3) $\mathcal{E}(M) = (\mathrm{e}^{M_t - \frac{1}{2}\langle M\rangle_t})_{t\in[0,T]}$ 是 (一致可积) 鞅.

习题 13.1 ([1] §3.5; [2] §1.10). 阅读.

习题 13.2 ([2] 引理 1.9). 证明: 适应于滤流 $(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$ 的上鞅 $(X_t)_{t\geq 0}$ 是鞅当且仅当 $\mathbb{E}X_t$ 不依赖 t.

证明. 随机变量 a.s. 不等式取等当且仅当两端期望相等. ■

习题 13.3 ([1] 3.5.18, [3] VIII.1.24). 设 $B = (B_t)_{t\in[0,1]}$ 是零初值标准 *Brown* 运动, 定义停时 $\tau := \inf\{t : t + B_t^2 = 1\}$ 和随机过程 $X = (X_t)_{t\in[0,1)}$, 其中 $X_t := -2(1-t)^{-2}B_t\mathbb{1}_{\{t\leq\tau\}}$.

1. 证明 a.s. 有 $\tau < 1$, 从而 $\int_0^1 X_t^2\,\mathrm{d}t < \infty$.

   证明. 由轨道连续性易见 $\tau \leq 1$, 且

   $$\mathbb{P}\{\tau = 1\} \leq \mathbb{P}\{\max_{t\leq 1-\delta}(t + B_t^2) < 1\} \leq \mathbb{P}\{B_{1-\delta}^2 < \delta\} \xrightarrow[\delta\searrow 0]{} 0.$$

   而 $X_t^2 = 4(1-t)^{-4}B_t^2\mathbb{1}_{\{t\leq\tau\}} \leq 4(1-t)^{-3}\mathbb{1}_{\{t\leq\tau\}}$, 所以 $\int_0^1 X_t^2\,\mathrm{d}t \leq 4\int_0^\tau (1-t)^{-3}\,\mathrm{d}t < \infty$ a.s.. ■

2. 对 $((1-t)^{-2}B_t^2)_{t\in[0,1)}$ 应用 *Itô* 公式, 得出

   $$\int_0^1 X\,\mathrm{d}B - \frac{1}{2}\int_0^1 X_t^2\,\mathrm{d}t = -1 - 2\int_0^\tau [(1-t)^{-4} - (1-t)^{-3}]B_t^2\,\mathrm{d}t \leq -1.$$

   证明. 直接计算, $\mathrm{d}((1-t)^{-2}B_t^2) = (2(1-t)^{-3}B_t^2 + (1-t)^{-2})\,\mathrm{d}t + 2(1-t)^{-2}B_t\,\mathrm{d}B_t$, 从而

   $$\begin{aligned}\int_0^1 X\,\mathrm{d}B = -2\int_{t=0}^\tau (1-t)^{-2}B_t\,\mathrm{d}B_t &= \int_0^\tau (2(1-t)^{-3}B_t^2 + (1-t)^{-2})\,\mathrm{d}t - (1-\tau)^{-2}B_\tau^2 \\ &= 2\int_0^\tau (1-t)^{-3}B_t^2\,\mathrm{d}t + [\cancel{(1-\tau)^{-1}} - 1] - (\cancel{1-\tau)^{-2}(1}-\tau).\end{aligned}$$

   结合 $\frac{1}{2}\int_0^1 X_t^2\,\mathrm{d}t = 2\int_0^\tau (1-t)^{-4}B_t^2\,\mathrm{d}t$ 即得所求. ■

3. 证明指数上鞅 $Z := \mathcal{E}(\int X\,\mathrm{d}B) = (\mathrm{e}^{\int_0^t X\,\mathrm{d}B - \frac{1}{2}\int_0^t X_s^2\,\mathrm{d}s})_{t\in[0,1]}$ 不是鞅, 而 $Z^{\sigma_n} = (Z_{t\wedge\sigma_n})_{t\in[0,1]}$ 是鞅, 其中 $\sigma_n := 1 - \frac{1}{\sqrt{n}}$, $n \in \{1,2,3,\cdots\}$.

   证明. 由于 $Z_1 \leq \mathrm{e}^{-1} < 1 = Z_0$, 可见 Z 不是鞅. 记 $M := \int X\,\mathrm{d}B$, 则 $Z^{\sigma_n} = \mathcal{E}(M^{\sigma_n})$. 因为

   $$\langle M^{\sigma_n}\rangle_1 = \langle M\rangle_{\sigma_n} = \int_0^{\sigma_n} X_t^2\,\mathrm{d}t \leq 4\int_0^{\sigma_n}(1-t)^{-3}\,\mathrm{d}t = 2[(1-\sigma_n)^{-2} - 1] = 2n - 2 < \infty,$$

   可见 Novikov 条件成立, 故 Z^{σ_n} 是鞅. ■

习题 13.4 ([3] VIII.1.23). 设 $B=(B_t)_{t\geq 0}$ 是零初值标准 *Brown* 运动, τ 是满足 $\mathbb{E}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\tau}<\infty$ 的停时. 证明 $\mathbb{E}\,\mathrm{e}^{B_\tau-\frac{1}{2}\tau}=1$.

证明. 停止 Brown 运动 $B^\tau=(B_{t\wedge\tau})_{t\in[0,\infty]}$ 的特征为 $\langle B^\tau\rangle=(t\wedge\tau)_{t\in[0,\infty]}$, 依题意满足 Novikov 条件. 由此立得 $\mathcal{E}(B^\tau)=(\mathrm{e}^{B_{t\wedge\tau}-\frac{1}{2}(t\wedge\tau)})_{t\in[0,\infty]}$ 是一致可积鞅, 从而 $\mathbb{E}\,\mathrm{e}^{B_\tau-\frac{1}{2}\tau}=\mathbb{E}\,\mathcal{E}(B^\tau)_\infty=1$. ■

习题 13.5 ([3] VIII.1.36). 考虑样本空间 $\Omega:=C([0,1];\mathbb{R})$, 配备 *Wiener* 测度 $\mathbb{P}$ 和自然滤流 $(\mathscr{F}_t)_{t\in[0,1]}$. 取定有界可料过程 $b=(b_t)_{t\in[0,1]}$. 对于 $\omega\in\Omega$, 置 $\mathrm{d}\tilde{\mathbb{P}}(\omega):=\mathrm{e}^{\int_0^1 b_t(\omega)\,\mathrm{d}\omega(t)-\frac{1}{2}\int_0^1 b_t(\omega)^2\,\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}\mathbb{P}(\omega)$ 和

$$\theta(\omega):t\in[0,1]\mapsto\omega(t)-\int_0^t b_s(\omega)\,\mathrm{d}s\in\mathbb{R}.$$

证明: 若 $(M_t)_{t\in[0,1]}$ 是 $\mathbb{P}$-(局部) 鞅, 则 $(M_t\circ\theta)_{t\in[0,1]}$ 是 $\tilde{\mathbb{P}}$-(局部) 鞅.
例如, 若 $u\in C^{1,2}([0,1]\times\mathbb{R};\mathbb{R})$ 满足 $\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$, 则 $\big(u(t,\theta(\cdot)(t))\big)_{t\in[0,1]}$ 是 $\tilde{\mathbb{P}}$-(局部) 鞅.

证明. 利用局部鞅表示定理 ([3] V.3.4), 存在常数 C 和局部平方可积可料过程 $(H_s)_{s\in[0,1]}$, 使得

$$M_t(\omega)=C+\int_0^t H_s(\omega)\,\mathrm{d}\omega(s).$$

由于 θ 是可测双射, $(H_s\circ\theta)_{s\in[0,1]}$ 仍是局部平方可积可料过程. 根据 Girsanov 定理, $\big(\theta(\cdot)(t)\big)_{t\in[0,1]}$ 是 $\tilde{\mathbb{P}}$-Brown 运动, 因此

$$M_t\circ\theta(\omega)=C+\int_0^t H_s\circ\theta(\omega)\,\mathrm{d}\theta(\omega)(s)$$

是 $\tilde{\mathbb{P}}$-局部鞅. 接下来只需说明可积性. 易见 $\tilde{\mathbb{P}}\theta^{-1}=\mathbb{P}$, 因而 $\int|M_t\circ\theta|\,\mathrm{d}\tilde{\mathbb{P}}=\int|M_t|\,\mathrm{d}\mathbb{P}$. ■

命题 13.9 (Wiener 测度 (平移) 拟不变性). 考虑样本空间 $\Omega:=C([0,T];\mathbb{R})$, 配备 *Borel* 代数 $\mathscr{B}$ 和 *Wiener* 测度 $\mathbb{P}$, 从而有零初值标准 *Brown* 运动 $W:(t,w)\in[0,T]\times\Omega\mapsto W_t(w):=w(t)\in\mathbb{R}$. 令

$$W^{(\varepsilon h)}:(t,w)\in[0,T]\times\Omega\mapsto W_t^{(\varepsilon h)}(w):=w(t)-\varepsilon\int_0^t h(s)\,\mathrm{d}s\in\mathbb{R},$$

其中 $h\in L^2([0,T])$, $\varepsilon\in(-1,1)$, 则对 $A\in\mathscr{B}$ 有 $\mathbb{P}\{W\in A\}=0\iff\mathbb{P}\{W^{(\varepsilon h)}\in A\}=0$.

证明. 利用定理13.5可得与 $\mathbb{P}$ 相互绝对连续的 $\tilde{\mathbb{P}}^\varepsilon$, 使 $W^{(\varepsilon h)}$ 成为零初值 $\tilde{\mathbb{P}}^\varepsilon$-标准 Brown 运动. □

特别地, 对于 Ω 上的可测函数 F 和 G, 如果 $F(W)\overset{\text{a.s.}}{=}G(W)$, 那么 $F(W^{(\varepsilon h)})\overset{\text{a.s.}}{=}G(W^{(\varepsilon h)})$.

命题 13.10 (Malliavin 导数). $\mathrm{D}_hF(W):=\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\big|_{\varepsilon=0}F(W^{(-\varepsilon h)})$ 满足 $\mathbb{E}\big[\mathrm{D}_hF(W)\big]=\mathbb{E}\big[F(W)\int_{t=0}^T h(t)\,\mathrm{d}W_t\big]$.

证明. 在 $\mathbb{P}$ 下, $F(W^{(-\varepsilon h)})-F(W)\overset{d}{=}F(W)(\frac{\mathrm{d}\tilde{\mathbb{P}}^\varepsilon}{\mathrm{d}\mathbb{P}}-1)$, 且 $\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\big|_{\varepsilon=0}\frac{\mathrm{d}\tilde{\mathbb{P}}^\varepsilon}{\mathrm{d}\mathbb{P}}=\int_{t=0}^T h(t)\,\mathrm{d}W_t$. □

更多内容可参看 M. Hairer. (2021+). Introduction to Malliavin Calculus.

14 局部时 · 动机 (2021 年 11 月 22 日)

例 14.1. 在例13.6中, $\mathrm{d}\tilde{\mathbb{P}}/\mathrm{d}\mathbb{P}=\mathrm{e}^{\int_{t=0}^T f'(t)\,\mathrm{d}B_t-\frac{1}{2}\int_0^T f'(t)^2\,\mathrm{d}t}$. 我们有

$$\frac{\mathbb{P}\{\max_{t\in[0,T]}|B_t-f(t)|<\varepsilon\}}{\mathbb{P}\{\max_{t\in[0,T]}|B_t|<\varepsilon\}}=\frac{\mathbb{P}\{\max_{t\in[0,T]}|\tilde{B}_t|<\varepsilon\}}{\tilde{\mathbb{P}}\{\max_{t\in[0,T]}|\tilde{B}_t|<\varepsilon\}}\xrightarrow[\varepsilon\searrow 0]{}\frac{\mathrm{d}\mathbb{P}}{\mathrm{d}\tilde{\mathbb{P}}}\bigg|_{\{\tilde{B}\equiv 0\}}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\int_0^T f'(t)^2\,\mathrm{d}t}.$$

例 14.2. 设 $B=(B_t)_{t\geq 0}$ 是 (n 维) 标准 *Brown* 运动. 若 $B_0=0$, 则 $B\overset{d}{=}(\varepsilon B_{t/\varepsilon^2})_{t\geq 0}$, $\forall\varepsilon>0$. 于是

$$\mathbb{P}(\max_{t\in[0,T]}|B_t|<\varepsilon\,|\,B_0=0)=\mathbb{P}(\max_{t\in[0,T/\varepsilon^2]}|B_t|<1\,|\,B_0=0)=\mathbb{P}(\sigma>T/\varepsilon^2\,|\,B_0=0),$$

其中 $\sigma:=\inf\{t:|B_t|\geq 1\}$. 令 $u(t,x):=\mathbb{E}[f(B_t)\mathbb{1}_{\{\sigma>t\}}\,|\,B_0=x]$, 其中 f 定义于 $\{x\in\mathbb{R}^n:|x|<1\}$.

可得

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\Delta_x u, \ t \geq 0, \ |x| < 1, \\ u|_{t=0} = f, \ u|_{|x|=1} = 0. \end{cases}$$

设 ϕ_n 是 $-\frac{1}{2}\Delta$ 的特征函数:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\Delta_x \phi_n + \lambda_n \phi_n = 0, \ |x| < 1, \\ \qquad \phi_n|_{|x|=1} = 0. \end{cases}$$

则有 $u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda_n t}\phi_n(x) \int_{|y|<1} \phi_n(y) f(y)\,\mathrm{d}y$, 其中 $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$. 特别地, 当 $\varepsilon \searrow 0$ 时,

$$\mathbb{P}(\sigma > T/\varepsilon^2 \,|\, B_0 = 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda_n T/\varepsilon^2}\phi_n(0) \int_{|y|<1} \phi_n(y)\,\mathrm{d}y \sim \mathrm{e}^{-\lambda_1 T/\varepsilon^2}\phi_1(0) \int_{|y|<1} \phi_1(y)\,\mathrm{d}y.$$

参看 N. Ikeda; S. Watanabe. (1989). *Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes* (2nd ed.). §6.9.

例 14.3 (Brown 局部时)**.** 对于一维标准 *Brown* 运动 $B = (B_t)_{t\geq 0}$, *Lévy* 证明了 a.s. 存在有限的

$$L_t^a(B) := \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^t \mathbb{1}_{\{|B_s - a| < \varepsilon\}}\,\mathrm{d}s, \quad t \geq 0, \ a \in \mathbb{R}.$$

形式上, $L_t^a(B) = \int_0^t \delta_a(B_s)\,\mathrm{d}s$, 从而适用于非光滑分析.

习题 14.1 ([2] §4.5)**.** 阅读.

习题 14.2. 设 $g \in C^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$ 在有限个点外二阶连续可微, g'' 在不连续处左右极限存在, 并且 g'' 有界. 对于一维标准 *Brown* 运动 $(B_t)_{t\geq 0}$, 证明 $g(B_t) = g(B_0) + \int_0^t g'(B)\,\mathrm{d}B + \frac{1}{2}\int_0^t g''(B_s)\,\mathrm{d}s$.

证明. 用磨光子 $j_\varepsilon := \frac{1}{\varepsilon} j(\frac{\cdot}{\varepsilon})$ 与 g 作卷积得到光滑函数 $g * j_\varepsilon$, 应用 Itô 公式然后令 $\varepsilon \searrow 0$. ■

15 局部时 · Tanaka 公式 (2021 年 11 月 24 日)

例 15.1. 设 $B = (B_t)_{t\geq 0}$ 是一维标准 *Brown* 运动, 则

$$|B_t - a| = |B_0 - a| + \int_0^t \mathrm{sgn}(B - a)\,\mathrm{d}B + L_t^a(B), \quad t \geq 0, \ a \in \mathbb{R}.$$

证明. 对 $g_\varepsilon(B) = |B - a|\mathbb{1}_{\{|B-a|\geq\varepsilon\}} + (\frac{(B-a)^2}{2\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{2})\mathbb{1}_{\{|B-a|<\varepsilon\}}$ 应用习题14.2, 然后令 $\varepsilon \searrow 0$. □

类似地, $\begin{cases} (B_t - a)^+ = (B_0 - a)^+ + \int_0^t \mathbb{1}_{(a,\infty)}(B)\,\mathrm{d}B + \frac{1}{2}L_t^a(B), \\ (B_t - a)^- = (B_0 - a)^- - \int_0^t \mathbb{1}_{(-\infty,a]}(B)\,\mathrm{d}B + \frac{1}{2}L_t^a(B). \end{cases}$

定理 15.2 (Tanaka)**.** 设 $X = (X_t)_{t\geq 0}$ 是一维连续半鞅, $a \in \mathbb{R}$, 则存在增过程 $L^a(X) = (L_t^a(X))_{t\geq 0}$, 使得对任意 $t \geq 0$ 成立 $\begin{cases} (X_t - a)^+ = (X_0 - a)^+ + \int_0^t \mathbb{1}_{(a,\infty)}(X)\,\mathrm{d}X + \frac{1}{2}L_t^a(X), \\ (X_t - a)^- = (X_0 - a)^- - \int_0^t \mathbb{1}_{(-\infty,a]}(X)\,\mathrm{d}X + \frac{1}{2}L_t^a(X), \\ |X_t - a| = |X_0 - a| + \int_0^t \mathrm{sgn}(X - a)\,\mathrm{d}X + L_t^a(X). \end{cases}$

定义 15.3 (局部时)**.** 定理15.2中 $L^a(X)$ 称为 X 在水平 a 处的**局部时**, 且

注 15.4. $(t,\omega,a) \mapsto L_t^a(X)(\omega)$ 是 $(\mathscr{P} \otimes \mathscr{B}_{\mathbb{R}})/\mathscr{B}_{[0,\infty)}$ 可测的; 特别地, $L^a(X)$ 可料, $\forall a \in \mathbb{R}$.

命题 15.5. 连续半鞅 X 的局部时 $t \mapsto L_t^a(X)$ 生成的 *Lebesgue–Stieltjes* 测度支撑于 $\{t : X_t = a\}$.

证明. 对 $(X - a)^2 = |X - a|^2$ 两端分别应用 Itô 公式, 可得 $\int_{t=0}^T |X_t - a|\,\mathrm{d}L_t^a(X) = 0$, $\forall T > 0$. □

定理 15.6 (Itô–Tanaka–Meyer). 设 $X=(X_t)_{t\geq 0}$ 是连续半鞅, f 是凸函数, f'_- 是 f 的左导数, 则

$$f(X_t)=f(X_0)+\int_0^t f'_-(X)\,\mathrm{d}X+\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} L_t^a(X)\,\mathrm{d}f'_-(a),\quad t\geq 0.$$

命题 15.7. 若 $X=(X_t)_{t\geq 0}$ 是连续半鞅, 则 $L_t^a(X)$ 关于 t 连续且关于 a 右连左极.

进一步地, 若 $M=(M_t)_{t\geq 0}$ 是连续鞅, 则 $L_t^a(M)$ 关于 t 和 a 均连续.

定理 15.8 (占位时). 设 $X=(X_t)_{t\geq 0}$ 是连续半鞅, $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是有界可测函数, 则

$$\textstyle\int_{s=0}^t g(X_s)\,\mathrm{d}\langle X\rangle_s=\int_{\mathbb{R}} g(a)L_t^a(X)\,\mathrm{d}a,\quad \forall t\geq 0.$$

推论 15.9. 连续半鞅 $X=(X_t)_{t\geq 0}$ 的局部时满足 $L_t^a(X)=\lim_{\varepsilon\searrow 0}\frac{1}{\varepsilon}\int_{s=0}^t \mathbb{1}_{[a,a+\varepsilon)}(X_s)\,\mathrm{d}\langle X\rangle_s$.

进一步地, 连续鞅 $M=(M_t)_{t\geq 0}$ 的局部时满足 $L_t^a(M)=\lim_{\varepsilon\searrow 0}\frac{1}{2\varepsilon}\int_{s=0}^t \mathbb{1}_{(a-\varepsilon,a+\varepsilon)}(M_s)\,\mathrm{d}\langle M\rangle_s$.

习题 15.1 ([2]: §2.8, §2.9; [1]: §3.6, §3.7). 阅读. 注意 *[1]* 中的局部时额外乘了系数 $\frac{1}{2}$.

习题 15.2 ([2] 引理 2.26; [1]: 3.6.12, 3.7.7). 阅读证明 ***Fubini* 型定理**:

设 $M=(M_t)_{t\geq 0}\in\mathcal{M}^2_{\mathrm{loc}}$, μ 是 $(\mathbb{R},\mathscr{B}_{\mathbb{R}})$ 上 σ-有限测度, $(\Phi_t^x)_{t\geq 0}^{x\in\mathbb{R}}$ 是随机场, 且 $(t,\omega,x)\mapsto\Phi_t^x(\omega)$ 是 $(\mathscr{P}\otimes\mathscr{B}_{\mathbb{R}})/\mathscr{B}_{\mathbb{R}}$ 可测的. 若存在 $f\in L^1(\mu)$ 使得 $\forall x\in\mathbb{R}$ 都有 $\sup_{t,\omega}|\Phi_t^x(\omega)|\leq f(x)$, 且 $\forall T\geq 0$ 都有 $(\omega,x)\mapsto\int_{t=0}^T\Phi_t^x\,\mathrm{d}M_t$ 可测, 则 $\big(\int_{\mathbb{R}}\Phi_t^x\,\mathrm{d}\mu(x)\big)_{t\geq 0}\in\mathcal{L}^*_{\mathrm{loc}}(M)$, 且

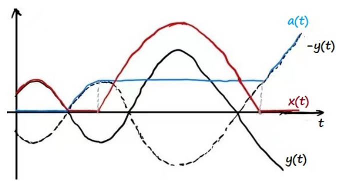
$$\int_{t=0}^T\left(\int_{\mathbb{R}}\Phi_t^x\,\mathrm{d}\mu(x)\right)\mathrm{d}M_t=\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{t=0}^T\Phi_t^x\,\mathrm{d}M_t\right)\mathrm{d}\mu(x),\quad T\geq 0.$$

习题 15.3. 证明连续有限变差过程 $X=(X_t)_{t\geq 0}$ 的局部时恒为零.

证明. $\int_0^t\mathrm{sgn}(X-a)\,\mathrm{d}X=\int_{s=0}^t\mathrm{sgn}(X_s-a)\,\mathrm{d}X_s=\int_{s=0}^t\mathrm{d}|X_s-a|=|X_t-a|-|X_0-a|$, $\forall a\in\mathbb{R}$. ■

局部时 · 应用 (2021 年 12 月 1 日)

引理 15.10 (Skorokhod). 设 $y:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ 连续, $y(0)\geq 0$, 则存在唯一的 $x:[0,\infty)\to[0,\infty)$ 和 $a:[0,\infty)\to[0,\infty)$, 使得 $x=y+a$, 且 a 零初值、连续、递增、生成的 *Lebesgue–Stieltjes* 测度支撑于 $\{t:x(t)=0\}$. 事实上, $a(t)=0\vee\max_{s\in[0,t]}\{-y(s)\}$.



Credit: Y.-F. Chen

推论 15.11. 设 B 是零初值一维标准 *Brown* 运动, 则 $L_t^0(B)=\max_{s\in[0,t]}\beta_s$, 其中 $\beta:=-\int\mathrm{sgn}(B)\,\mathrm{d}B$ 也是零初值一维标准 *Brown* 运动 *(*例 *8.3)*.

定理 15.12 (Lévy). 设 $B=(B_t)_{t\geq 0}$ 是零初值一维标准 *Brown* 运动, $M_t:=\max_{s\in[0,t]}B_s$, 则

$$(M_t-B_t,M_t)_{t\geq 0}\overset{d}{=}(|B_t|,L_t^0(B))_{t\geq 0}.$$

16 随机微分方程 (2021 年 12 月 1 日)

设 $B=(B_t)_{t\geq 0}$ 是 (n 维) 标准 Brown 运动, 考虑 (m 维) 扩散过程 $X=(X_t)_{t\geq 0}$ 满足

$$\mathrm{d}X_t=b(t,X_t)\,\mathrm{d}t+\sigma(t,X_t)\,\mathrm{d}B_t,\qquad\text{(SDE)}$$

其中称 $b=(b^i)^{1\le i\le m}:[0,\infty)\times\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m$ 为**漂移系数**, $\sigma=(\sigma^i_j)^{1\le i\le m}_{1\le j\le n}:[0,\infty)\times\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^{m\times n}$ 为**弥散系数**. 定义 $a=(a^{ik})^{1\le i,k\le m}:=\sigma\sigma^\top=(\sum_{j=1}^n\sigma^i_j\sigma^k_j)^{1\le i,k\le m}:[0,\infty)\times\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^{m\times m}$, 称为**扩散系数**.

定义 16.1 (强解)**.** 连续适应随机过程 $X=(X_t)_{t\ge0}$ 称为(SDE)的**强解**, 若

- $(b(t,X_t))_{t\ge0}\in\mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}([0,\infty)):=\{$适应 $(Z_t)_{t\ge0}:(t\mapsto Z_t)\in L^1_{\mathrm{loc}}([0,\infty))$ a.s.$\}$,
- $(\sigma(t,X_t))_{t\ge0}\in\mathcal{L}^*_{\mathrm{loc}}(B)=\{$循序可测 $(Z_t)_{t\ge0}:(t\mapsto Z_t)\in L^2_{\mathrm{loc}}([0,\infty))$ a.s.$\}$, 且
- $X_t=X_0+\int_0^t b(s,X_s)\,\mathrm{d}s+\int_{s=0}^t\sigma(s,X_s)\,\mathrm{d}B_s$, $t\ge0$.

定义 16.2 (轨道 (强) 唯一性)**.** 关于(SDE)的**强唯一性**成立, 若初值给定的任意两个强解不可区分.

例 16.3. *一维SDE $\mathrm{d}X_t=b(t,X_t)\,\mathrm{d}t+\mathrm{d}B_t$ 有强唯一性, 若 b 有界且 $\forall t\ge0$ 都有 $b(t,\cdot)$ 递减.*

定理 16.4. *考虑(SDE). 若 b 和 σ 满足*

- *(全局 Lipschitz 条件) $|b(t,x)-b(t,y)|+|\sigma(t,x)-\sigma(t,y)|\lesssim|x-y|$, 和*
- *(线性增长条件) $|b(t,x)|+|\sigma(t,x)|\lesssim|x|+1$,*

则任给 $\xi\in L^2(\mathscr{F}_0)$, 存在强解 $X=(X_t)_{t\ge0}$ 使之初值为 $X_0=\xi$. 任取 $T\in[0,\infty)$, 有

$$\log\|X_t\|_{L^2(\mathbb{P})}\lesssim_{L(b,\sigma),T}t+1+\log(1+\|\xi\|_{L^2(\mathbb{P})}),\quad t\in[0,T],$$

其中 $L(b,\sigma)$ 表示 (b,σ) 的 Lipschitz 常数和线性增长率.

证明. 用 Picard 迭代构造解, 用 Gronwall 不等式给出二阶矩的估计. □

习题 16.1 ([1]: §5.1, §5.2; [2] §3.1)**.** *阅读; 注意强解存在性证明中的局部化技巧.*

习题 16.2. *利用 Picard 迭代求解线性随机微分方程 $\mathrm{d}X_t=\lambda X_t\,\mathrm{d}B_t$, 其中 $B=(B_t)_{t\ge0}$ 是零初值一维标准 Brown 运动, $X_0=\xi$ 与 B 独立, λ 是常数.*

解. 归纳定义 $X^{(n)}:=\xi+\lambda\int X^{(n-1)}\,\mathrm{d}B$, 其中 $X^{(0)}\equiv\xi$. 由命题12.7可得 $X^{(n)}_t=\xi\sum_{k=0}^n\frac{\lambda^k}{k!}H_k(B_t,t)$, 于是 $X=\lim_{n\to\infty}X^{(n)}=\xi\,\mathcal{E}(\lambda B)$. ////

习题 16.3. *在爆炸时之前, 求解 $\mathrm{d}X_t=\frac12\mathrm{e}^{-2X_t}\,\mathrm{d}t+\mathrm{e}^{-X_t}\,\mathrm{d}X_t$, $X_0=a\in\mathbb{R}$.*

解. 整理可得 $\mathrm{d}t=2(\mathrm{e}^{2X_t}-\mathrm{e}^{X_t})\,\mathrm{d}X_t=\mathrm{d}(\mathrm{e}^{2X_t}-2\,\mathrm{e}^{X_t})$, 则 $\mathrm{e}^{2X_t}-2\,\mathrm{e}^{X_t}=t+\mathrm{e}^{2a}-2\,\mathrm{e}^a$, 进而解得 $X_t=\log\left(1+\varepsilon_a\sqrt{t+(\mathrm{e}^a-1)^2}\right)$, $0\le t<(2\,\mathrm{e}^a-\mathrm{e}^{2a})\vee(\varepsilon_a\infty)$, 其中 $\varepsilon_a:=\mathrm{sgn}(a)\mathbb{1}_{[a\ne0]}\pm\mathbb{1}_{[a=0]}$. ////

习题 16.4 ([1] 5.2.17)**.** *设 $B=(B_t)_{t\ge0}$ 是一维标准 Brown 运动. 证明 $\mathrm{d}X_t=3X_t^{1/3}\,\mathrm{d}t+3X_t^{2/3}\,\mathrm{d}B_t$ 有不可数个强解形如 $X^{(\theta)}_t:=B_t^3\mathbb{1}_{\{t\ge\tau_\theta\}}$, 其中 $\tau_\theta:=\inf\{t\ge\theta:B_t=0\}$, $\theta\in[0,\infty]$.*

证明. 对 $X^{(\theta)}_t=(B_t\mathbb{1}_{\{t\ge\tau_\theta\}})^3$ 应用 Itô 公式, 有

$$\mathrm{d}X^{(\theta)}_t=3(B_t\mathbb{1}_{\{t\ge\tau_\theta\}})^2\,\mathrm{d}(B_t\mathbb{1}_{\{t\ge\tau_\theta\}})+3(B_t\mathbb{1}_{\{t\ge\tau_\theta\}})\,\mathrm{d}(t\mathbb{1}_{\{t\ge\tau_\theta\}})=3(X^{(\theta)}_t)^{2/3}\,\mathrm{d}B_t+3(X^{(\theta)}_t)^{1/3}\,\mathrm{d}t.\ ■$$

17 随机微分方程 · 续 (2021 年 12 月 6 日 +8 日)

命题 17.1 (Yamada–Watanabe)**.** *一维SDE的解具有强唯一性, 若成立 Osgood 条件:*

$$|b(t,x)-b(t,y)|\le k(|x-y|),\quad\&\quad|\sigma(t,x)-\sigma(t,y)|\le h(|x-y|),$$

其中 $k,h:[0,\infty)\to[0,\infty)$ 是零初值严格递增函数, k 凹, 且 $\int_0^\varepsilon\frac{\mathrm{d}u}{k(u)}=\int_0^\varepsilon\frac{\mathrm{d}u}{h(u)^2}=\infty$, $\forall\varepsilon>0$.

命题 17.2 (比较定理). 设 $B=(B_t)_{t\ge 0}$ 是一维标准 *Brown* 运动, $X^i=(X^i_t)_{t\ge 0}$ 是一维随机微分方程 $\mathrm{d}X^i_t=b_i(t,X^i_t)\,\mathrm{d}t+\sigma(t,X^i_t)\,\mathrm{d}B_t$ 的唯一存在的强解, $i=1,2$. 若 $b_1\le b_2$ 且其一满足 *Lipschitz* 条件, $X^1_0\le X^2_0$, 则 $\mathbb{P}\{X^1_t\le X^2_t,\ \forall t\ge 0\}=1$.

证明. 由占位时公式, 可得 $L^0(X^1-X^2)=0$. 接下来对 $(X^1-X^2)^+$ 应用 Itô–Tanaka 公式, 取期望后代入 Lipschitz 条件, 从而可以利用 Gronwall 不等式. □

定义 17.3 (弱解). 随机过程 $\tilde{X}=(\tilde{X}_t)_{t\ge 0}$ 称为(SDE)的**弱解**, 若 $\tilde{X}$ 是某个 (新的) 带滤流概率空间上的随机微分方程 $\mathrm{d}\tilde{X}_t=b(t,\tilde{X}_t)\,\mathrm{d}t+\sigma(t,\tilde{X}_t)\,\mathrm{d}\tilde{B}_t$ 的强解, 其中 $\tilde{B}=(\tilde{B}_t)_{t\ge 0}$ 是标准 Brown 运动.

定义 17.4 (分布 (弱) 唯一性). 关于(SDE)的**弱唯一性**成立, 若初分布给定的任意两个弱解同分布.

例 17.5 (弱存在/唯一性不蕴涵强存在/唯一性). 一维*SDE* $\mathrm{d}X_t=\operatorname{sgn}(X_t)\,\mathrm{d}B_t$ 的弱解存在并且是标准 *Brown* 运动, 而 X 和 $-X$ 必然同时为强解; 但是, 考虑 B 的自然滤流时, 强解不存在.

定理 17.6. 考虑*SDE* $\mathrm{d}X_t=b(t,X_t)\,\mathrm{d}t+\mathrm{d}B_t$, $0\le t\le T$, 其中 T 是固定正数, $b:[0,T]\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 满足线性增长条件 $|b(t,x)|\lesssim |x|+1$, 则对任意初分布都存在弱解. 如果 (在各自的概率空间上) 弱解 $X^i=(X^i_t)_{t\in[0,T]}$ 满足 $\int_0^T|b(t,X^i_t)|^2\,\mathrm{d}t<\infty$ (a.s.), $i=1,2$, 那么 $X^1\overset{d}{=}X^2$.

证明. 应用 Girsanov 定理变换 Brown 运动: 原测度下的 X, 新测度下的 $(X_t-\int_0^t b(s,X_s)\,\mathrm{d}s)_{t\in[0,T]}$. □

习题 17.1 ([1] 5.2.19). 设 $B=(B_t)_{t\ge 0}$ 是一维标准 *Brown* 运动, $X^i=(X^i_t)_{t\ge 0}$ 是一维随机微分方程 $\mathrm{d}X^i_t=b_i(t,X^i_t)\,\mathrm{d}t+\sigma(t,X^i_t)\,\mathrm{d}B_t$ 的唯一存在的强解, 其中 $b_i:[0,\infty)\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 连续, $i=1,2$. 证明: 若 $b_1<b_2$ 且 $X^1_0\le X^2_0$, 则 $\mathbb{P}\{X^1_t\le X^2_t,\ \forall t\ge 0\}=1$.

证明. 取定 $m>233$, 则 b_2-b_1 在紧集 $[0,m]\times[-m,m]$ 上的下界为正, 于是可构造 Lipschitz 连续的函数 $b_m:[0,\infty)\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 使其在 $[0,m]\times[-m,m]$ 上满足 $b_1\le b_m\le b_2$. 设 $X^m=(X^m_t)_{t\ge 0}$ 是 $\mathrm{d}X^m_t=b_m(t,X^m_t)\,\mathrm{d}t+\sigma(t,X^m_t)\,\mathrm{d}B_t$ 的初值为 $X^m_0=X^1_0$ 的强解, 那么命题17.2给出

$$\mathbb{P}\big\{X^1_t\le X^m_t\le X^2_t,\ \forall t\le m\wedge\inf\{t:|X^m_t|>m\}\big\}=1.$$

令 $m\to\infty$, 注意 $m\wedge\inf\{t:|X^m_t|>m\}\ge m\wedge\inf\{t:|X^1_t|\vee|X^2_t|>m\}\to\infty$, 即证所欲. ■

习题 17.2 ([1] 5.2.20). 考虑 $\mathrm{d}X_t=b(X_t)\,\mathrm{d}t+\sigma(X_t)\,\mathrm{d}B_t$, 其中 $B=(B_t)_{t\ge 0}$ 是一维标准 *Brown* 运动, $b\in C^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$, $\sigma\in C^2(\mathbb{R};(0,\infty))$. 设 $b'-\frac12\sigma\sigma''-\frac{b\sigma'}{\sigma}$ 有界, 且 $\frac1\sigma$ 在 $\pm\infty$ 处均不可积. 给定初值后, 证明此方程存在唯一的强解.

证明. 令 $f:=\int_0^\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\sigma(u)}$, 则有 $f'=\frac1\sigma>0$ 和 $f''=-\frac{\sigma'}{\sigma^2}$. 记 $Y_t:=f(X_t)$, 则 $X_t=f^{-1}(Y_t)$. 由 Itô 公式, $\mathrm{d}Y_t=f'(X_t)\,\mathrm{d}X_t+\frac12 f''(X_t)\,\mathrm{d}\langle X\rangle_t=\mathrm{d}B_t+(\frac b\sigma-\frac12\sigma')(X_t)\,\mathrm{d}t=\mathrm{d}B_t+(\frac b\sigma-\frac12\sigma')\circ f^{-1}(Y_t)\,\mathrm{d}t$, 这里将 Y 视作待求. 可见 $\big((\frac b\sigma-\frac12\sigma')\circ f^{-1}\big)'=\big((\frac{b'}{\sigma}-\frac{b\sigma'}{\sigma^2}-\frac12\sigma'')\frac{1}{f'}\big)\circ f^{-1}=(b'-\frac{b\sigma'}{\sigma}-\frac12\sigma\sigma'')\circ f^{-1}$ 有界, 故 Y 的随机微分方程满足 Lipschitz 条件和线性增长条件. 强解 Y 存在唯一, 则 X 亦如是. ■

习题 17.3 ([1] 5.3.12). 考虑一维*SDE* $\mathrm{d}X_t=-\operatorname{sgn}(X_t)\,\mathrm{d}t+\mathrm{d}B_t$, $X_0=B_0$. 证明其弱解 $X=(X_t)_{t\ge 0}$ 满足 $\mathbb{P}\{X_t\in A\}=\mathrm{e}^{-t/2}\,\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{B_t\in A\}}\,\mathrm{e}^{-|B_t|+L^0_t(B)}]$, $A\in\mathscr{B}_{\mathbb{R}}$.

证明. 由 Tanaka 公式, $-|B_t|+L^0_t(B)=-\int_0^t\operatorname{sgn}(B)\,\mathrm{d}B$. 设概率测度 $\tilde{\mathbb{P}}$ 满足 $\frac{\mathrm{d}\tilde{\mathbb{P}}}{\mathrm{d}\mathbb{P}}\big|_{\mathscr{F}_t}=\mathrm{e}^{-t/2-\int_0^t\operatorname{sgn}(B)\,\mathrm{d}B}$, 则 $\tilde{B}_t:=B_t+\int_0^t\operatorname{sgn}(B_s)\,\mathrm{d}s$ 在 $\tilde{\mathbb{P}}$ 下是标准 Brown 运动. 我们有 $\mathrm{d}B_t=-\operatorname{sgn}(B_t)\,\mathrm{d}t+\mathrm{d}\tilde{B}_t$, 于是 $(B,\tilde{B})_\#\tilde{\mathbb{P}}=(X,B)_\#\mathbb{P}$. 特别地, $\mathbb{P}\{X_t\in A\}=\tilde{\mathbb{P}}\{B_t\in A\}=\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{B_t\in A\}}\frac{\mathrm{d}\tilde{\mathbb{P}}}{\mathrm{d}\mathbb{P}}]$ 即为所求. ■

习题 17.4 ([1]: §5.3.A, §5.3.B). 阅读.

命题 17.7. 考虑(SDE)将 b 替换为 $b+H\sigma$, 其中 $H\in\mathcal{L}^*(B)$ 在 $[0,T]$ 上有界, T 是固定正数, 则摄动前后的随机微分方程在 $[0,T]$ 上的弱解存在性与分布唯一性保持不变.

定理 17.8 (Yamada–Watanabe). 对于(SDE), 轨道唯一性蕴涵分布唯一性.

推论 17.9 (Yamada–Watanabe). 对于(SDE), 弱解存在性加轨道唯一性蕴涵强解存在性. 此时成立如下**因果原则**: 存在 $(\mathscr{B}^m_{\mathbb{R}}\otimes\mathscr{B}^n_{C[0,\infty)})/\mathscr{B}^m_{C[0,\infty)}$ 可测映射 h, 使得 $X=h(X_0,B)$.

18 Stroock–Varadhan 鞅方法 (2021 年 12 月 8 日)

注 18.1. 求(SDE)的弱解等价于寻找连续函数空间上的特定分布.

定义 18.2. $(\mathsf{A}f)(t,x):=\frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^m a^{ik}(t,x)\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^k}(t,x)+\sum_{i=1}^m b^i(t,x)\frac{\partial f}{\partial x^i}(t,x)$, $\forall f(t,\cdot)\in C^2(\mathbb{R}^m;\mathbb{R})$. 对于时齐 (不依赖 t) 情形, $(\mathsf{A}f)(x):=\frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^m a^{ik}(x)\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^k}(x)+\sum_{i=1}^m b^i(x)\frac{\partial f}{\partial x^i}(x)$, $\forall f\in C^2(\mathbb{R}^m;\mathbb{R})$.

定理 18.3. 循序可测随机过程 $X=(X_t)_{t\ge0}$ 是(SDE)的弱解当且仅当对任意 $f\in C^{1,2}([0,\infty)\times\mathbb{R}^m;\mathbb{R})$ 都有 $M^f=(M^f_t)_{t\ge0}$ 是连续局部鞅, 其中

$$M^f_t:=f(t,X_t)-f(0,X_0)-\int_0^t\Big(\frac{\partial f}{\partial s}+\mathsf{A}f\Big)(s,X_s)\,\mathrm{d}s.$$

此时, $\langle M^f,M^g\rangle_t=\int_0^t\sum_{i,k=1}^m\big(a^{ik}\frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial g}{\partial x^k}\big)(s,X_s)\,\mathrm{d}s$, $\forall f,g\in C^{1,2}([0,\infty)\times\mathbb{R}^m;\mathbb{R})$.

证明. 必要性用 Itô 公式; 充分性用定理9.3, 为计算互特征需取坐标映射 $(t,x)\mapsto x^i$, $1\le i\le m$. □

习题 18.1 ([1]: §5.3.C, §5.3.D, §5.4.A, §5.4.B; [2]: §3.6, §3.3, §3.4). 阅读.

习题 18.2 ([1] 5.4.33). 设 $b^i,a^{ik}:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$ $(1\le i,k\le m)$ 都是在紧集上有界的可测函数, $(X_t)_{t\ge0}$ 是 (m 维) 连续适应随机过程, $f\in C^2(\mathbb{R}^m;\mathbb{R})$. 对 $\lambda\in\mathbb{R}$, 定义 $f_\lambda(t,x):=\mathrm{e}^{-\lambda t}f(x)$, $(t,x)\in[0,\infty)\times\mathbb{R}^m$. 证明 (‡) $M^{f_0}\in\mathcal{M}_{\mathrm{cts,loc}}\iff M^{f_\lambda}\in\mathcal{M}_{\mathrm{cts,loc}}$, 且
当 $1/f$ 在紧集上有界时, (‡) $\iff(N_t)_{t\ge0}\in\mathcal{M}_{\mathrm{cts,loc}}$, 其中 $N_t:=f(X_t)\,\mathrm{e}^{-\int_0^t\frac{\mathsf{A}f}{f}(X_s)\,\mathrm{d}s}-f(X_0)$.

证明. 易得 $\mathrm{d}M^{f_\lambda}_t=\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}M^{f_0}_t$ 和 $\mathrm{d}N_t=\mathrm{e}^{-\int_0^t\frac{\mathsf{A}f}{f}(X_s)\,\mathrm{d}s}\,\mathrm{d}M^{f_0}_t$, 其中 $\mathrm{d}M^{f_0}_t=\mathrm{d}f(X_t)-(\mathsf{A}f)(X_t)\,\mathrm{d}t$. ■

习题 18.3 ([1] 5.4.34). 设 $X=(X_t)_{t\ge0}$ 是(SDE)的解, 且 $\forall T>0$ 有 $|b(t,x)|+|\sigma(t,x)|\lesssim_T 1$, $t\in[0,T]$. 任取 $f\in C^{1,2}([0,\infty)\times\mathbb{R}^m;\mathbb{R})$ 和 $k=(k_t)_{t\ge0}\in\mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}([0,\infty))$, 证明 $M^{f,k}=(M^{f,k}_t)_{t\ge0}\in\mathcal{M}_{\mathrm{cts,loc}}$, 其中

$$M^{f,k}_t:=f(t,X_t)\,\mathrm{e}^{-\int_0^t k_u\,\mathrm{d}u}-f(0,X_0)-\int_0^t\Big(\frac{\partial f}{\partial s}+\mathsf{A}f-k_sf\Big)(s,X_s)\,\mathrm{e}^{-\int_0^s k_u\,\mathrm{d}u}\,\mathrm{d}s.$$

进一步地, 若 $\|f\|_{C^{1,2}}<\infty$ 且 k 有下界, 则 $M^{f,k}$ 是鞅.

证明. 由 Itô 公式, $\mathrm{d}M^{f,k}_t=\sum_{j=1}^n\mathrm{e}^{-\int_0^t k_u\,\mathrm{d}u}\sum_{i=1}^m\big(\frac{\partial f}{\partial x^i}\sigma^i_j\big)(t,X_t)\,\mathrm{d}B^j_t$. ■

习题 18.4 ([1] 5.4.35). 设 $X=(X_t)_{t\ge0}$ 是(SDE)的解, $X_0=x_0\in\mathbb{R}^m$, 其中 b 和 σ 都是不依赖 t 的在紧集上有界的可测函数. 对于 $f\in C^2(\mathbb{R}^m;[0,\infty))$, 若存在常数 $\lambda>0$ 和 $c\ge0$ 使得 $\mathsf{A}f+\lambda f\le c$, 证明 $\mathbb{E}f(X_t)\le f(x_0)\,\mathrm{e}^{-\lambda t}+\frac{c}{\lambda}(1-\mathrm{e}^{-\lambda t})$.

证明. 易见 M^f 是鞅, 于是 $\mathbb{E}f(X_t)=f(x_0)+\mathbb{E}\int_0^t(\mathsf{A}f)(X_s)\,\mathrm{d}s=f(x_0)+\int_0^t\mathbb{E}(\mathsf{A}f)(X_s)\,\mathrm{d}s$. 我们有 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big[\mathrm{e}^{\lambda t}\,\mathbb{E}f(X_t)\big]=\mathrm{e}^{\lambda t}\big[\lambda\,\mathbb{E}f(X_t)+\mathbb{E}(\mathsf{A}f)(X_t)\big]\le c\,\mathrm{e}^{\lambda t}$, 积分即得 $\mathrm{e}^{\lambda t}\,\mathbb{E}f(X_t)-f(x_0)\le\frac{c}{\lambda}(\mathrm{e}^{\lambda t}-1)$. ■

19 鞅问题 (2021 年 12 月 15 日)

注 19.1. 简便起见, 考虑时齐情形, 即各种系数不依赖 t.

定义 19.2 (鞅问题的解). 若 $\forall f \in C_c^2(\mathbb{R}^m;\mathbb{R})$ 都有 $M^f \in \mathcal{M}^2_{\text{cts}}$, 则 $C([0,\infty);\mathbb{R}^m)$ 上的概率测度称为 A 对应的**鞅问题的解**. 换言之, 鞅问题的解是 (SDE)(σ, b) 的弱解的分布.

注 19.3. 利用局部化, $M^f \in \mathcal{M}^2_{\text{cts}}$, $\forall f \in C_c^2(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}) \iff M^f \in \mathcal{M}_{\text{cts,loc}}$, $\forall f \in C^2(\mathbb{R}^m;\mathbb{R})$.

定义 19.4 (鞅问题适定性). 称一个鞅问题**适定**, 若任给固定初值都存在唯一解.

定义 19.5 (时齐 Markov 分布族). 称 $C([0,\infty);\mathbb{R}^m)$ 上的一族概率测度 $\{P_x\}_{x\in\mathbb{R}^m}$ 为 **Markov 族**, 若

(i). $\forall A \in \mathscr{B}^m_{C[0,\infty)}$ 有 $x \mapsto P_x(A)$ 可测,

(ii). $\forall x \in \mathbb{R}^m$ 有 $P_x\{\omega \in C([0,\infty);\mathbb{R}^m) : \omega(0) = x\} = 1$,

(iii). $\forall x \in \mathbb{R}^m$, $\forall t \geq 0$ 有 $P_x\theta_t^{-1}|\mathscr{B}^m_{C[0,t]} = P_{X_t}$, 其中 $\theta_t : \omega \mapsto \omega(\cdot + t)$ 且 $X_t : \omega \mapsto \omega(t)$.

如果(iii)中固定的 t 推广为 (有限) 停时 τ, 就得到了**强 Markov 性**.

定理 19.6. *若 σ 和 b 都是不依赖 t 的在紧集上有界的可测函数, 且 (SDE)(σ, b) 对应的鞅问题适定, 则此鞅问题的解构成强 Markov 族.*

习题 19.1 ([2] §4.3; [1] §5.4.C). 阅读.

20 鞅问题 · 适定性 (2021 年 12 月 20 日)

定理 20.1 (存在性). *证明.* 利用 Euler 折线法, 结合胎紧性得到子列极限分布, 即为鞅问题的解. □

定理 20.2 ((一维边际) 唯一性). *证明.* 在扩张概率空间上对鞅取期望, 让作用函数过遍决定类. □

注. 更多内容参看 D.W. Stroock; S.R.S. Varadhan. (2006). *Multidimensional Diffusion Processes*. Springer. `https://doi.org/10.1007/3-540-28999-2`

习题 20.1 ([1]: §5.4.D, §5.4.E, §2.4.B, §2.4.C; [2] §3.5). 阅读.

习题 20.2 ([1] 5.3.15). *设(SDE)中 b 和 σ 满足 $|b(t,x(t))| + |\sigma(t,x(t))| \leq L\big(1 + \max_{s\in[0,t]}|x(s)|\big)$, $\forall t \geq 0$, $\forall x \in C([0,\infty);\mathbb{R}^m)$, 其中 $L > 0$ 是常数. 证明: 若 $X = (X_t)_{t\geq 0}$ 是(SDE)的弱解, 则任取 $p \geq 1$ 和 $T > 0$, 存在仅依赖 p, T, L, m 的常数 $C > 0$, 使得 $\forall t \in [0,T]$ 有*
$\mathbb{E}\big[\max_{s\in[0,t]}|X_s|^{2p}\big] \leq C\big(1 + \mathbb{E}[|X_0|^{2p}]\big)\mathrm{e}^{Ct}$ 和 $\mathbb{E}\big[|X_t - X_s|^{2p}\big] \leq C\big(1 + \mathbb{E}[|X_0|^{2p}]\big)(t-s)^p$, $\forall s \in [0,t]$.

证明. 见 [1] §5.9 题解; 注意符号与此处略有区别. ■

21 随机积分 · 带跳 (2021 年 12 月 15 日 +22 日)

定义 21.1 (方括号过程). 设 $X = (X_t)_{t\geq 0}$ 是实值随机过程, 对每个 t 存在

$$[X]_t := \mathbb{P}\text{-}\lim \textstyle\sum_{k=1}^m (X_{t_k} - X_{t_{k-1}})^2 \quad (\max_k(t_k - t_{k-1}) \to 0),$$

其中 $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = t$, 则 $[X] = ([X]_t)_{t\geq 0}$ 称为 X 的**二次变差过程**.

习题 21.1. 设 $(N_t)_{t\ge0}$ 是速率参数为 λ 的 *Poisson* 过程, $\tilde N=(\tilde N_t)_{t\ge0}$, 其中 $\tilde N_t:=N_t-\lambda t$. 证明 $[\tilde N]_t=N_t$ 且 $(\tilde N_t^2-[\tilde N]_t)_{t\ge0}$ 是鞅. 注意 $(N_t)_{t\ge0}$ 不可料 (命题2.5), 因而不可能是补偿子.

证明. 在习题2.2中已知 $\tilde N$ 和 $(\tilde N_t^2-\lambda t)_{t\ge0}$ 是鞅, 而 $\tilde N_t^2-[\tilde N]_t=(\tilde N_t^2-\lambda t)-\tilde N_t-([\tilde N]_t-N_t)$, 所以只需验证二次变差. 固定 t. 当 $\max_k(t_k-t_{k-1})\to0$ 时, $\sum_k\mathbb P\{N_{t_k}-N_{t_{k-1}}\ge2\}=\sum_k o(t_k-t_{k-1})=o(1)$, 于是 $\mathbb P\text{-}\lim\sum_k(N_{t_k}-N_{t_{k-1}})^2=\sum_k(N_{t_k}-N_{t_{k-1}})=N_t$. ■

习题 21.2. 沿用习题21.1的记号. 令 $\tau_i:=\inf\{t:N_t\ge i\}$, 即 $(N_t)_{t\ge0}$ 的第 i 次跳跃时间. 逐轨道求 *Lebesgue–Stieltjes* 积分 $\int_{s=0}^t\mathbb 1_{[0,\tau_1)}(s)\,\mathrm d\tilde N_s$ 和 $\int_{s=0}^t\mathbb 1_{[0,\tau_1]}(s)\,\mathrm d\tilde N_s$. 注意 $(\mathbb 1_{[0,\tau_1]}(t))_{t\ge0}$ 可料.

解. 易得 $\int_{s=0}^t\mathbb 1_{[0,\tau_1)}(s)\,\mathrm d\tilde N_s=-\lambda(t\wedge\tau_1)$, 而 $\int_{s=0}^t\mathbb 1_{[0,\tau_1]}(s)\,\mathrm d\tilde N_s=N_{\tau_1}\mathbb 1_{\{\tau_1\le t\}}-\lambda(t\wedge\tau_1)=\tilde N_{t\wedge\tau_1}$. ////

命题 21.2. 设 $M=(M_t)_{t\ge0}\in\mathcal M^2$, 则 $[M]=([M]_t)_{t\ge0}$ 是右连续的增过程, 且 $(M_t^2-[M]_t)_{t\ge0}$ 是鞅.

注 21.3. 定理2.13表明 $M\in\mathcal M^2_{\mathrm{cts}}$ 有 $[M]=\langle M\rangle$. 习题21.1给出了 $[N]\ne\langle N\rangle$.

✍ 下面固定 $M=(M_t)_{t\ge0}\in\mathcal M^2$.

定义 21.4. $\mathcal L^2_{\mathrm{pd}}(\langle M\rangle):=\bigcap_{T\in(0,\infty)}\mathcal L^2_{T,\mathrm{pd}}(\langle M\rangle)$, $\mathcal L^2_{T,\mathrm{pd}}(\langle M\rangle):=\{\text{可料}\,(X_t)_{t\ge0}:\mathbb E\int_{t=0}^TX_t^2\,\mathrm d\langle M\rangle_t<\infty\}$.

命题 21.5. 范数 $\|X\|_{\mathcal L^2_{T,\mathrm{pd}}(\langle M\rangle)}:=\sqrt{\mathbb E\int_{t=0}^TX_t^2\,\mathrm d\langle M\rangle_t}$ 使 $\mathcal L^2_{T,\mathrm{pd}}(\langle M\rangle)$ 成为 *Hilbert* 空间.

推论 21.6. 准范数 $\|X\|_{\mathcal L^2_{\mathrm{pd}}(\langle M\rangle)}:=\sum_{T=1}^\infty(1\wedge\|X\|_{\mathcal L^2_{T,\mathrm{pd}}(\langle M\rangle)})/2^T$ 使 $\mathcal L^2_{\mathrm{pd}}(\langle M\rangle)$ 成为完备度量空间.

定理 21.7. $\mathcal L_0$ 是 $\mathcal L^2_{\mathrm{pd}}(\langle M\rangle)$ 的稠密子空间.

定义 21.8 (简单过程的随机积分). (♠) $\in\mathcal L_0$ 关于 M 的**随机积分**为鞅变换

$$\int_0^tX\,\mathrm dM:=I_t^M(X):=\sum_{k=0}^\infty\xi_k(M_{t_{k+1}\wedge t}-M_{t_k\wedge t}),\ t\in[0,\infty).$$

引理 21.9. 设 $(A_t)_{t\ge0}$ 是适应且可积的<u>连续</u>增过程. 若 $(X_t)_{t\ge0}$ 循序可测且 $\mathbb E\int_{t=0}^TX_t^2\,\mathrm dA_t<\infty$, $\forall T\in[0,\infty)$, 则存在可料过程 $(\tilde X_t)_{t\ge0}$ 使得 $\mathbb E\int_{t=0}^T|\tilde X_t-X_t|^2\,\mathrm dA_t=0$, $\forall T\in[0,\infty)$.

注 21.10. 当 $M\in\mathcal M^2_{\mathrm{cts}}$ 时, $\mathcal L^2_{\mathrm{pd}}(\langle M\rangle)\subset\mathcal L^*(M)$.

定义 21.11 (随机积分). $X\in\mathcal L^2_{\mathrm{pd}}(\langle M\rangle)$ 关于 $M\in\mathcal M^2$ 的**随机积分**为

$$\int X\,\mathrm dM:=I^M(X):=\mathcal M^2\text{-}\lim I^M(X^{(n)}),\ \text{其中}\ \mathcal L_0\ni X^{(n)}\xrightarrow{\mathcal L^2_{\mathrm{pd}}(\langle M\rangle)}X\ (n\to\infty).$$

定理 21.12. $I^M:X\in\mathcal L^2_{\mathrm{pd}}(\langle M\rangle)\mapsto\int X\,\mathrm dM\in\mathcal M^2$ 是线性等距, 且 $\langle\int X\,\mathrm dM\rangle=\big(\int_{s=0}^tX_s^2\,\mathrm d\langle M\rangle_s\big)_{t\ge0}$.

注 21.13. 类似地, 对于 $M\in\mathcal M^2_{\mathrm{loc}}$ 有 $I^M:X\in\mathcal L^2_{\mathrm{pd,loc}}(\langle M\rangle)\mapsto\int X\,\mathrm dM\in\mathcal M^2_{\mathrm{loc}}$, 其中

$$\mathcal L^2_{\mathrm{pd,loc}}(\langle M\rangle):=\big\{\text{可料}\,(X_t)_{t\ge0}:\text{存在一列停时}\ \tau_n\nearrow\infty\ \text{(a.s.) 使得}\ (X_t\mathbb 1_{(0,\tau_n]}(t))_{t\ge0}\in\mathcal L^2_{\mathrm{pd}}(\langle M\rangle)\big\}.$$

命题 21.14. $\langle\int X\,\mathrm dM,\int Y\,\mathrm dN\rangle=\big(\int_{s=0}^tX_sY_s\,\mathrm d\langle M,N\rangle_s\big)_{t\ge0}$, $\forall X\in\mathcal L^2_{\mathrm{pd,loc}}(\langle M\rangle)$, $\forall Y\in\mathcal L^2_{\mathrm{pd,loc}}(\langle N\rangle)$, $\forall M,N\in\mathcal M^2_{\mathrm{loc}}$. 特别地, $\langle\int X\,\mathrm dM,N\rangle=\big(\int_{s=0}^tX_s\,\mathrm d\langle M,N\rangle_s\big)_{t\ge0}$.

Itô 公式

定义 21.15 (纯断局部鞅). 称 (初值未必为零的) 局部鞅 M **纯断** (purely discontinuous), 记为 $M\in\mathcal M_{\mathrm{dis,loc}}$, 若 $\forall N\in\mathcal M_{\mathrm{cts,loc}}$ 有 MN 是局部鞅, 亦即 $\langle M,N\rangle=0$.

引理 21.16. 有限变差局部鞅是纯断的.

命题 21.17 ($\mathcal{M}_{\mathrm{loc}} \oplus \{$初值$\} = \mathcal{M}_{\mathrm{cts,loc}} \oplus \mathcal{M}_{\mathrm{dis,loc}}$). 对于局部鞅 M, 存在唯一的分解 $M = M^{\mathrm{cts}} + M^{\mathrm{dis}}$, 使得 $M^{\mathrm{cts}} \in \mathcal{M}_{\mathrm{cts,loc}}$ 且 $M^{\mathrm{dis}} \in \mathcal{M}_{\mathrm{dis,loc}}$.

定义 21.18. 定义7.1中的半鞅 $X = X_0 + M + A$ 的**连续局部鞅部分**唯一确定为 $X^{\mathrm{cts}} := M^{\mathrm{cts}}$.

定义 21.19 (跳过程). 随机过程 $X = (X_t)_{t\geq 0}$ 的**跳过程**为 $\Delta X = (\Delta X_t)_{t\geq 0}$, 其中 $\Delta X_t := X_t - X_{t-}$, 并且约定 $X_{0-} = X_0$.

引理 21.20. 设 $X = (X_t)_{t\geq 0}$ 是半鞅, 则有

$$[X]_t = \langle X^{\mathrm{cts}}\rangle_t + \textstyle\sum_{s\leq t}(\Delta X_s)^2 = X_t^2 - X_0^2 - 2\int_{s=0}^t X_{s-}\,\mathrm{d}X_s, \quad \forall t \geq 0.$$

特别地, 对于 $M \in \mathcal{M}_{\mathrm{loc}}$, 有 $M^2 - [M] \in \mathcal{M}_{\mathrm{loc}}$.

定理 21.21 (半鞅 Itô 公式). 设 $f \in C^2(\mathbb{R};\mathbb{R})$. 对于半鞅 $X = (X_t)_{t\geq 0}$, 有

$$\begin{aligned} f(X_t) &= f(X_0) + \int_{s=0}^t f'(X_{s-})\,\mathrm{d}X_s + \frac{1}{2}\int_{s=0}^t f''(X_{s-})\,\mathrm{d}\langle X^{\mathrm{cts}}\rangle_s + \sum_{s\leq t}[\Delta f(X_s) - f'(X_{s-})\Delta X_s] \\ &= f(X_0) + \int_{s=0}^t f'(X_{s-})\,\mathrm{d}X_s + \frac{1}{2}\int_{s=0}^t f''(X_{s-})\,\mathrm{d}[X]_s \\ &\quad + \sum_{s\leq t}\Big[\Delta f(X_s) - f'(X_{s-})\Delta X_s - \frac{1}{2}f''(X_{s-})(\Delta X_s)^2\Big]. \end{aligned}$$

例 21.22. 承习题*21.2*, 有 $\begin{cases} \int_{s=0}^t \tilde{N}_{s-}\,\mathrm{d}\tilde{N}_s = \frac{1}{2}(\tilde{N}_t^2 - N_t), \\ \int_{s=0}^t \tilde{N}_{s-}^2\,\mathrm{d}\tilde{N}_s = \frac{1}{3}(\tilde{N}_t^3 - N_t) - \frac{1}{2}N_t(N_t-1) + \lambda\sum_{i=1}^{N_t}\tau_i. \end{cases}$

习题 21.3 ([2]: §2.4, §2.5, §2.6, §7.1, §7.6). 阅读.

The End ☕